

Einführung in die Computersimulation II

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Montag, 30. Juni 2025

19. Ableitung des Binder-Parameters U_4 und von $\ln\langle m^2 \rangle$

- a) Zeigen Sie, dass die Ableitung des Binder-Parameters $U_4 = 1 - \langle m^4 \rangle / 3\langle m^2 \rangle^2$ (vgl. Aufgabe 1 und 5) nach der inversen Temperatur β durch folgende Kombination von Erwartungswerten berechnet werden kann:

$$\frac{dU_4(\beta)}{d\beta} = V(1 - U_4) \left(\langle e \rangle - 2\frac{\langle m^2 e \rangle}{\langle m^2 \rangle} + \frac{\langle m^4 e \rangle}{\langle m^4 \rangle} \right).$$

Wie lautet die analoge Formel für $dU_2/d\beta$ mit $U_2 = 1 - \langle m^2 \rangle / 3\langle |m| \rangle^2$?

- b) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass

$$\frac{d \ln \langle m^2 \rangle (\beta)}{d\beta} = V \left(\langle e \rangle - \frac{\langle m^2 e \rangle}{\langle m^2 \rangle} \right).$$

Wie lautet die analoge Formel für $d \ln \langle |m| \rangle / d\beta$?

20. “Finite-Size Scaling” im zweidimensionalen Ising-Modell am kritischen Punkt

Simulieren Sie das zweidimensionale Ising-Modell am exakt bekannten Übergangspunkt $\beta_c = \ln(1 + \sqrt{2})/2 \approx 0.440\,686\dots$ mit dem Single-Cluster-Algorithmus für lineare Gittergrößen $L = 8, 16, 32, 64$ und 128 (und periodischen Randbedingungen). Bestimmen Sie aus den Zeitreihen für die Energie und Magnetisierung die spezifische Wärme, magnetische Suszeptibilität und den Binder-Parameter sowie die in der Vorlesung besprochenen Ableitungen des Binder-Parameters und der Magnetisierung nach der inversen Temperatur (s.a. Aufgabe 19).

Kontrollieren Sie das “Finite-Size Scaling” Verhalten des zweidimensionalen Ising-Modells am Übergangspunkt β_c ($C(\beta_c) = a_1 \ln(L) + b_1 + \dots$, $\chi(\beta_c) = a_2 L^{\gamma/\nu} + b_2 + \dots$, $\frac{dU_A}{d\beta}(\beta_c) = a_3 L^{1/\nu} + \dots$, $\frac{d \ln \langle m^2 \rangle}{d\beta}(\beta_c) = a_4 L^{1/\nu} + \dots$) und bestimmen daraus die kritischen Exponenten durch “Least-Squares” Fits.