TP4 – Statistische Physik I
11. Übungsblatt

Abgabetermin: Montag, 28. Juni 2010

31. **Kugelvolumen und Kugeloberfläche im d-dimensionalen Raum**

Eine d-dimensionale Kugel mit Radius r ist definiert durch

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2 = r^2 \,,$$

wobei x_i, $i = 1, \ldots, d$, kartesische Koordinaten bezeichnen.

a) Man berechne das Volumen und die Oberfläche dieser Kugel.

b) Man bestimme die Schichtdicke Δr, für die das Volumen der Kugelschale gleich dem Volumen der (inneren) Kugel ist. Man betrachte speziell den Grenzfall $d \to \infty$.

Hinweis: Man betrachte das Integral

$$I_d = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \ldots dx_d \, e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2)} \,.$$

32. **Linearer harmonischer Oszillator im mikrokanonischen Ensemble**

Gegeben sei der klassische lineare harmonische Oszillator

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \,.$$

a) Bestimmen Sie die normierte Dichteverteilungsfunktion $\rho(q,p)$ des mikrokanonischen Ensembles.

b) Berechnen Sie damit die Mittelwerte der potentiellen und der kinetischen Energie.

33. **Zufallswege im Computer**

Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Erzeugung von Zufallswegen. Die Startposition sei $x = 0$, die Wahrscheinlichkeit für einen Einheitsschritt nach rechts sei p (nach links also $q = 1 - p$) und die Gesamtanzahl der Schritte sei N. Die Schritte nach rechts werden mit N_R und die nach links mit N_L bezeichnet; die Endposition des "Drunken Walkers" ist damit durch $x = N_R - N_L$ gegeben.

a) Stellen Sie 20 Zufallswege mit $N = 10$, 20 und 100 graphisch dar (die momentane Position als Funktion der Schritte). Im Prinzip reicht eine Abbildung. Warum?

b) Kontrollieren Sie für $N = 10$, 20 und $p = 0.5$, 0.7, daß die Werte von N_R nach der Binomial-Verteilung verteilt sind. Dazu sollten etwa 100 000 Zufallswege erzeugt werden (was auf typischen PC's einige Sekunden Rechenzeit benötigt).

c) Untersuchen Sie den Grenzfall $p \ll 1$ und $N_R \ll N$ und vergleichen Sie mit der Approximation durch eine Poisson-Verteilung aus Aufgabe 22b); s.a. Aufgabe 23.

d) Messen Sie das Histogramm $\hat{P}(x)$ der Endpositionen x nach N Schritten und vergleichen Sie mit der (geeignet normierten) Gauß-Approximation $G(x)$. Erzeugen Sie dazu wieder etwa 100 000 Zufallswege. Neben einem direkten Vergleich von $\hat{P}(x)$ und $G(x)$ ist zur Beurteilung der Güte der Approximation eine Darstellung von $\hat{P}(x)/G(x)$ sinnvoll. Variieren Sie $N = 10$, 20 und 100 und $p = 0.3$, 0.5, 0.7 und 0.9.

e) Messen Sie die Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}(N, s)$, nach N Schritten zum ersten Mal bei s vorbeizukommen. Vergleichen Sie mit dem analytischen Resultat aus der Vorlesung.

f) "Spielen" Sie mit Ihrem Computerprogramm, und denken Sie sich dabei weitere Fragestellungen und Vergleiche mit analytischen Ergebnissen aus, d.h. beginnen Sie mit eigener kreativer Erforschung dieses Problems ...