Prof. Dr. Wolfhard Janke SS 2010

TP4 – Statistische Physik I
10. Übungsblatt

Abgabetermin: Freitag, 18. Juni 2010

28. **Kumulantenentwicklung**

Die in Aufgabe 24 bzw. 27e) bereits eingeführte *charakteristische Funktion* einer Wahrscheinlichkeitsdichte $W(y)$ ist die Fourier-Transformierte

$$\tilde{W}(k) \equiv \langle e^{iky} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, \exp(iky) \, W(y). \tag{1}$$

Wenn alle Momente $\langle y^n \rangle$ existieren, dann kann $\tilde{W}(k)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\tilde{W}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle y^n \rangle. \tag{2}$$

Wie lassen sich die Momente durch Ableitungen von $\tilde{W}(k)$ ausdrücken?

Die Entwicklung von $\ln \tilde{W}(k)$ in k liefert eine Potenzreihenentwicklung, in der die sogenannten *Kumulanten* κ_n auftreten:

$$\ln \tilde{W}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \kappa_n. \tag{3}$$

Drücken Sie die ersten vier Kumulanten $\kappa_1, \ldots, \kappa_4$ durch die Momente aus. Rechnen Sie diese Formeln in die sogenannten *zentralen Momente*,

$$\mu_n = \langle (y - \langle y \rangle)^n \rangle, \tag{4}$$

um. Berechnen Sie $\tilde{W}(k)$ für eine Gauß-Verteilung, und bestimmen Sie in diesem Fall *alle* Kumulanten.

29. **Eindimensionale Perkolation**

a) Verwenden Sie die exakte Lösung für das eindimensionale Perkolationsproblem um zu zeigen, daß das $k$te Moment der Clustergrößenverteilung, $M_k = \sum_s s^k n_s$, wie $\Gamma_k (1-p)^{1-k}$ divergiert. Berechnen Sie die Amplituden Γ_k.

b) Berechnen Sie in einer Dimension die (Gitterpunkt-) Clusterzahlen für den Fall, daß Gitterpunkte mit Wahrscheinlichkeit p und Gitterkanten mit Wahrscheinlichkeit x besetzt sind. Wiederholen Sie Teil a) für diese Verteilung.

c) Berechnen Sie die Verhältnisse $\Gamma_k \Gamma_l / \Gamma_m \Gamma_{k+l-m}$ für beide Fälle. Was kann man aus diesen Verhältnissen schließen?

30. **Maxwell-Verteilung**

a) Ausgehend von der *Maxwell-Verteilung* $f(\vec{v})$ bzw. $\omega(\epsilon)$ mit $\epsilon = m\,\vec{v}^2/2$ zeige man, daß das mittlere Schwankungsquadrat der kinetischen Energie eines einzelnen Teilchens gegeben ist durch: $\langle (\epsilon - \langle \epsilon \rangle)^2 \rangle = (3/2)(k_B T)^2$. Wie lautet die allgemeine Formel für $\langle \epsilon^k \rangle \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon\, \epsilon^k \omega(\epsilon)$?

b) Betrachten Sie nun die totale Energie für N nichtwechselwirkende Teilchen, $E = \sum_{n=1}^N \epsilon_n$, und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E \rangle$ und die Varianz $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$. Dabei sind die ϵ_n, $n = 1, \ldots, N$ als unkorreliert vorausgesetzt. Was ergibt sich jeweils für die totale Energie pro Teilchen, $e = E/N$?

c) Wie sieht die Verteilung $W(e)$ von $e = E/N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \epsilon_n \equiv \overline{\epsilon}$ für große N aus? Vergleichen Sie sie in einer Graphik mit der Verteilung $\omega(\epsilon_n)$ der Einzelenergien ϵ_n.

Hinweis: S. Aufgabe 27.