Prof. Dr. Wolfhard Janke, Dr. Elmar Bittner WS2009/10

Einführung in Computersimulationen I

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 15. Dezember 2009

13. **"Bias" Problem**

Die Endlichkeit von Meßreihen verursacht nicht nur unvermeidliche *statistische Fehler*, sondern kann auch zu *systematischen Abweichungen ("Bias")* bei der Abschätzung von Erwartungswerten führen. Für unkorrelierte Daten besteht zwischen dem Erwartungswert $\langle \hat{\sigma}^2_{X_i} \rangle$ des Varianzschätzers $\hat{\sigma}^2_{X_i}$ der Einzelmessung X_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ und der tatsächlichen Varianz der Einzelmessung, $\sigma^2_{X_i}$, z.B. der Zusammenhang:

$$\langle \hat{\sigma}^2_{X_i} \rangle = \sigma^2_{X_i} \left(1 - \frac{1}{N} \right) . \tag{1}$$

a) Verifizieren Sie, daß für gleichverteilte Zufallszahlen $X_i \in [0, 1)$ $\langle X_i \rangle = 1/2$ und $\langle {X_i}^2 \rangle = 1/3$ gilt (was folgt für $\langle {X_i}^k \rangle$?) und bestimmen Sie daraus die Varianz $\sigma^2_{X_i} = \langle {X_i}^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2 = 1/12$.

b) Nehmen Sie mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators (z.B. *drand48*) eine sehr kurze Zeitreihe von $N = 20$ gleichverteilten Zufallszahlen $X_i \in [0, 1)$ auf und berechnen Sie den Schätzer der Varianz der Einzelmessung $\hat{\sigma}^2_{X_i} = \overline{(X - \overline{X})^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2$. Wiederholen Sie den Versuch $M = 10^5$ mal und speichern Sie jeweils die Werte des Varianzschätzers $\hat{\sigma}^{2\,(j)}_{X_i}$, $j = 1, 2, \ldots, M$ ab.

c) Verifizieren Sie Gleichung (1) unter der Annahme

$$\langle \hat{\sigma}^2_{X_i} \rangle \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \hat{\sigma}^{2\,(j)}_{X_i} .$$

d) Geben Sie für unkorrelierte Daten einen "unbiased" Varianzschätzer an.

14. **Statistische Fehleranalyse mit der "Binning"-Methode**

    Schreiben Sie ein Programm zur statistischen Fehleranalyse mit Hilfe der "Binning"-Methode. Validieren Sie das Programm durch Vergleich mit den exakten Resultaten aus der Vorlesung für synthetische bivariate Gaußsche Zeitreihen.