

Einführung in Computersimulationen I

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Dienstag, 15. Dezember 2009

13. “Bias” Problem

Die Endlichkeit von Meßreihen verursacht nicht nur unvermeidliche *statistische Fehler*, sondern kann auch zu *systematischen Abweichungen* (“Bias”) bei der Abschätzung von Erwartungswerten führen. Für unkorrelierte Daten besteht zwischen dem Erwartungswert $\langle \hat{\sigma}_{X_i}^2 \rangle$ des Varianzschätzers $\hat{\sigma}_{X_i}^2$ der Einzelmessung X_i ($i = 1, 2, \dots, N$) und der tatsächlichen Varianz der Einzelmessung, $\sigma_{X_i}^2$, z.B. der Zusammenhang:

$$\langle \hat{\sigma}_{X_i}^2 \rangle = \sigma_{X_i}^2 \left(1 - \frac{1}{N} \right). \quad (1)$$

- Verifizieren Sie, daß für gleichverteilte Zufallszahlen $X_i \in [0, 1)$ $\langle X_i \rangle = 1/2$ und $\langle X_i^2 \rangle = 1/3$ gilt (was folgt für $\langle X_i^k \rangle$?) und bestimmen Sie daraus die Varianz $\sigma_{X_i}^2 = \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2 = 1/12$.
- Nehmen Sie mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators (z.B. *drand48*) eine sehr kurze Zeitreihe von $N = 20$ gleichverteilten Zufallszahlen $X_i \in [0, 1)$ auf und berechnen Sie den Schätzer der Varianz der Einzelmessung $\hat{\sigma}_{X_i}^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$. Wiederholen Sie den Versuch $M = 10^5$ mal und speichern Sie jeweils die Werte des Varianzschätzers $\hat{\sigma}_{X_i}^{2(j)}$, $j = 1, 2, \dots, M$ ab.
- Verifizieren Sie Gleichung (1) unter der Annahme

$$\langle \hat{\sigma}_{X_i}^2 \rangle \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\sigma}_{X_i}^{2(j)}.$$

- Geben Sie für unkorrelierte Daten einen “unbiased” Varianzschätzer an.

14. Statistische Fehleranalyse mit der “Binning”-Methode

Schreiben Sie ein Programm zur statistischen Fehleranalyse mit Hilfe der “Binning”-Methode. Validieren Sie das Programm durch Vergleich mit den exakten Resultaten aus der Vorlesung für synthetische bivariate Gaußsche Zeitreihen.