Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

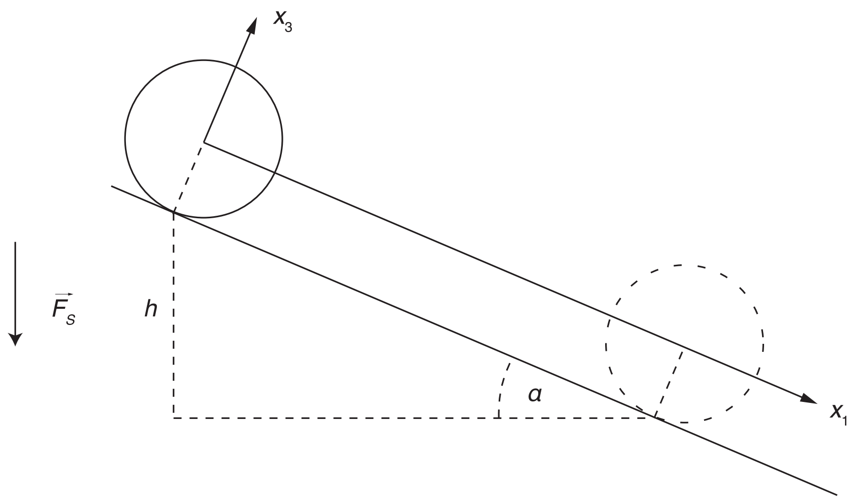
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 14

Aufgabe 14.1 12 Punkte

Das klassische Physikerrätsel: Sie haben ein rohes und ein gekochtes Ei, wissen aber nicht welches der beiden das rohe und welches das gekochte ist. Wie können Sie das herausfinden ohne die Eier zu öffnen? Spätestens nach der Lösung dieser Aufgabe sollten Sie die Antwort kennen.



Wir betrachten eine Vollkugel die (ohne Schlupf, d.h. die Kugel rutscht nicht sondern rollt durch Reibungskontakt vollständig) unter dem Einfluss der Erdschwerkraft eine Ebene mit Neigungswinkel α herunterrollt. Das raumfeste Koordinatensystem wählen wir so, dass der Ursprung im Schwerpunkt der Kugel zu Beginn der Rollbewegung ist. Die raumfesten Koordinatenachsen wählen wir wie in der Skizze. Das körperfeste Bezugssystem wählen wir so, dass $\vec{e}_2' = \vec{e}_2$. Die Kugel dreht sich beim Rollen also um die $\vec{e}_2'$-Achse, der dazugehörige Drehwinkel sei ϕ. Die Kugel habe den Radius r_0, die Masse M und die konstante Massendichte $\rho = \frac{M}{V}, V = \frac{4\pi}{3} r_0^3$. Die kinetische Energie der Kugel lautet daher

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}\,, \qquad T_{\text{trans}} = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2\,, \qquad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2\,, \qquad I_2 = \frac{2}{5} M r_0^2\,.$$

Dabei ist I_2 das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich der Drehung um die $\vec{e}_2'$-Achse und $\vec{R}$ ist der Schwerpunktsvektor im raumfesten Bezugssystem mit Komponenten R_i.

a) R_1 und ϕ sind durch eine Zwangsbedingung verknüpft. Wie sieht diese aus?

b) Drücken Sie die kinetische Energie T durch $\dot{\phi}$, M, r_0 aus. Gehen Sie dabei davon aus, dass $\dot{R}_2 = \dot{R}_3 = 0$ (d.h. dass die Kugel die Bewegung aus dem Stillstand beginnt).

c) Drücken Sie die potentielle Energie U durch ϕ, M, r_0, α aus. Hinweis: Die Kugel verhält sich diesbezüglich wie eine Punktmasse mit Masse M am Ort $\vec{R}$.

d) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion $L = T - U$ und daraus die Bewegungsgleichung für (die freie verallgemeinerte Koordinate) ϕ. Lösen Sie diese Gleichung mit den Anfangsbedingungen $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$.

e) Berechnen Sie $\dot{R}_1(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 nach dem die Kugel im Schwerefeld die Höhe h “herabgefallen” ist – siehe Skizze –, d.h. drücken Sie $\dot{R}_1(t_1)$ durch h, M, r_0, α aus.

Wir betrachten nun statt einer Vollkugel einen zusammengesetzten starren Körper der aus zwei Einzelteilen besteht: 1) Einer kleineren Vollkugel mir Radius $(\frac{1}{2})^{1/5} r_0$, Masse M_1, V_1, Schwerpunkt $\vec{R}_1$, 2) einer Kugelschale mit äußerem Radius r_0 und innerem Radius $(\frac{1}{2})^{1/5} r_0$, Masse M_2, Volumen V_2, Schwerpunkt $\vec{R}_2$. Die kleinere Vollkugel befinde sich innerhalb der Kugelschale, so dass beide Körper zusammen denselben Raum einnehmen wie die Vollkugel aus den ersten Aufgabenteilen. Die Massendichte der beiden Teilkörper sei $\rho_1 = \frac{M_1}{V_1} = \rho_2 = \frac{M_2}{V_2} = \rho = \frac{M}{V}$. Wir nehmen an, dass zwischen den beiden Teilkörpern keine Reibung herrscht. Zu Beginn der Bewegung stehen beide Teilkörper still. Im Laufe der Bewegung rollt die Kugelschale die schiefe Ebene herunter, während die innere Vollkugel wegen der mangelnden Reibung ohne Drehung einfach mitgeführt wird. Die kinetische Energie ist also

$$T = T_{\text{trans},1} + T_{\text{trans},2} + T_{\text{rot},2}\,, \qquad T_{\text{trans},i} = \frac{M_i}{2}\dot{\vec{R}}_i^2\,, \qquad T_{\text{rot},2} = \frac{1}{2} I_{2,2}\dot{\phi}^2\,,$$

wobei $I_{2,2}$ das Trägheitsmoment der Kugelschale bezüglich Drehungen um die $\vec{e}_2'$-Achse ist.

f) Berechnen Sie $I_{2,2}$ basierend auf folgender Tatsache: Wenn sich ein starrer Körper K_1 durch “Subtraktion” zweier starrer Körper K_2 und K_3 mit gemeinsamem Schwerpunkt ergibt, dann gilt für alle Trägheitsmomente $I_{1,i}$ von K_1: $I_{1,i} = I_{2,i} - I_{3,i}$ wobei $I_{2,i}$, $I_{3,i}$ die Trägheitsmomente von K_2, K_3 sind.

g) $\dot{R}_1(t_1)$ sei analog zu e) definiert. Berechnen Sie $\dot{R}_1(t_1)$ für den Fall der zusammengesetzten Kugel und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus e).

Abgabe: Bis Montag 30.1.2017, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.