Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1 6 Punkte

Wir betrachen ein System aus N Teilchen in drei Raumdimensionen. Die Massen m_i der Teilchen seien konstant. Wir nehmen an, dass die potentielle Energie U nur von den Beträgen $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ der Verbindungsvektoren zwischen jeweils zwei Teilchen abhängt, insbesondere soll U nicht von den Teilchengeschwindigkeiten abhängen. Gesamtmasse M, Schwerpunkt $\vec{R}$, Gesamtimpuls $\vec{P}$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ sind wie üblich definiert. Mit z.B. P_j bezeichnen wir die j-te kartesische Komponente von $\vec{P}$. Wir betrachten kontinuierliche Transformationen $\vec{r}_i(t) \mapsto \vec{r}_i(t, \alpha)$ und wählen als verallgemeinerte Koordinaten die kartesischen Koordinaten der N Teilchen. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir mit L die Lagrange-Funktion ausgewertet auf der ursprünglichen Bahnkurve und mit L' die Lagrange-Funktion ausgewertet auf der transformierten Bahnkurve.

a) Wir betrachen eine Rotation um die $\vec{e}_3$-Achse mit Winkel α.

$$\vec{r}_i(t, \alpha) = \quad D(3, \alpha)\, \vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_i(t) \qquad \text{für alle} \qquad i = 1, \ldots, N$$

Erläutern Sie, warum diese Transformation T und U und damit auch L invariant lässt.

b) Verifizieren Sie

$$\vec{\tau}_i = \left. \frac{d\vec{r}_i(t, \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = -\vec{e}_3 \times \vec{r}_i$$

c) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße für die betrachtete Rotation

$$Q = -\vec{e}_3 \cdot \vec{L} = -L_3$$

ist. *Hinweis: Schreiben Sie Q als Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (für geeignete $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) und verwenden Sie die Spatproduktregel $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.*

d) Wir betrachten nun spezielle Galileitransformationen in $\vec{e}_1$-Richtung

$$\vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha t \vec{e}_1 \qquad \text{für alle} \qquad i = 1, \ldots, N\,.$$

Zeigen Sie, dass sich die Lagrange-Funktion transformiert als

$$L' = L + \alpha \frac{d}{dt} X + \alpha^2 \frac{d}{dt} X_2$$

für geeignete, von Ihnen zu bestimmende X, X_2.

e) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße Q für die betrachtete spezielle Galileitransformation folgende Form hat:

$$Q = P_1 t - M R_1 \, .$$

Aufgabe 13.2 6 Punkte

Wir betrachten ein sphärisches Pendel, d.h. einen Massenpunkt mit Masse m der an einer masselosen Stange der Länge l im Ursprung des Koordinatensystems befestigt ist und sich damit auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius l bewegen kann. Das sphärische Pendel befinde sich im Schwerefeld der Erde. Die kartesischen Koordinatenachsen seien so gewählt, dass die Schwerkraft in Richtung der $\vec{e}_3$-Achse zeigt.

a) Wählen Sie Kugelkoordinaten als verallgemeinerte Koordinaten und drücken Sie die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten aus. Berücksichtigen Sie dabei die Zwangsbedingung des Systems. *Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits ein Ausdruck für die kinetische Energie in Kugelkoordinaten hergeleitet, diesen dürfen Sie ohne Herleitung verwenden.*

b) Nennen Sie zwei Erhaltungsgrößen des Systems und begründen Sie, warum diese erhalten sind.

c) Berechnen Sie die Lagrange-Gleichungen für die zwei freien verallgemeinerten Koordinaten θ, ϕ.

d) Zeigen Sie: Es existieren Lösungen mit $\dot{\phi} = \omega =$ konst. und $\theta =$ konst.. Welche Beziehung muss dafür zwischen ω und θ gelten? Interpretieren Sie diese Lösungen physikalisch.

e) Betrachten Sie die Bewegungsgleichungen für $\phi =$ konst. und $\theta \ll 1$ und geben Sie eine nicht konstante Näherungslösung für $\theta(t)$ an.

Abgabe: Bis Montag 23.1.2017, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.