

## Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

## Aufgabenblatt 10

**Aufgabe 10.1**

6 Punkte

Wir betrachten einen senkrechten Wurf bzw. Fall im Schwerfeld der Erde unter dem Einfluss der Corioliskraft. Der Wurf bzw. Fall spielt sich auf dem Breitengrad mit Winkel  $\phi$  ab. Wir wählen das in der Vorlesung besprochene Bezugssystem: der Ursprung sei auf der Erdoberfläche, die  $\vec{e}_3$ -Achse zeige nach oben (in den Himmel), die  $\vec{e}_1$ -Achse tangential nach Osten und die  $\vec{e}_2$ -Achse tangential nach Norden (Da wir nur ein einziges Bezugssystem betrachten, schreiben wir alle Größen der Einfachheit halber "ungestrichen", also  $\vec{e}_1$  statt  $\vec{e}'_1$ , etc.). Der Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erde sei  $\vec{\Omega}$  mit Länge  $\Omega = |\vec{\Omega}| = 2\pi/(1\text{Tag})$ . Wir wollen die Bewegungsgleichungen approximativ lösen. Dazu schreiben wir die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  als

$$\vec{r}(t) = \vec{y}(t) + \Omega \vec{s}(t).$$

Die Idee ist, dass  $\vec{y}(t)$  die Bahnkurve ohne Einfluss der Corioliskraft ist, und  $\Omega \vec{s}(t)$  die Änderung der Bahnkurve durch den Einfluss dieser Kraft. Da  $\Omega$  klein im Vergleich zu typischen inversen Zeitskalen ist, können wir uns  $\Omega \vec{s}(t)$  als klein vorstellen. Im Folgenden bezeichnen wir mit Termen nullter / erster / zweiter Ordnung in  $\Omega$  Terme in denen  $\Omega$  nicht vorkommt / Terme proportional zu  $\Omega$  / Terme proportional zu  $\Omega^2$ .

- Geben Sie die Komponenten von  $\vec{\Omega}$  im betrachteten Bezugssystem an. Setzen Sie den obigen Ansatz für  $\vec{r}(t)$  in die Bewegungsgleichung im betrachteten Bezugssystem ein – von den Scheinkräften soll dabei wie gesagt nur die Corioliskraft berücksichtigt werden, als Kraft die Schwerkraft der Erde. Geben Sie die drei Komponenten der Bewegungsgleichung im betrachteten Bezugssystem an. Vernachlässigen Sie bei Ihrer Berechnung Terme zweiter Ordnung in  $\Omega$ .
- Lösen Sie die gefundenen Gleichungen wie folgt. Betrachten Sie zunächst isoliert die Terme nullter Ordnung in  $\Omega$ . Diese geben für sich genommen Bewegungsgleichungen für die drei Komponenten von  $\vec{y}(t)$ . Lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen  $\vec{y}(0) = (0, 0, y_0)$ ,  $\dot{\vec{y}}(0) = (0, 0, v_0)$ .
- Betrachten Sie nun isoliert die Terme erster Ordnung in  $\Omega$ . Diese geben für sich genommen bei bekanntem  $\vec{y}(t)$  Bewegungsgleichungen für die drei Komponenten von  $\vec{s}(t)$ . Setzen Sie Ihr Ergebnis für  $\vec{y}(t)$  aus b) ein. Lösen Sie die sich daraus ergebenden Bewegungsgleichungen für die drei Komponenten von  $\vec{s}(t)$  mit den Anfangsbedingungen  $\vec{s}(0) = \vec{0}$ ,  $\dot{\vec{s}}(0) = \vec{0}$ .

- d) Ein (idealisiert punktförmiger) Körper falle aus der Höhe  $h$  (über der Erdoberfläche) auf die Erdoberfläche und lande in Leipzig ( $\phi = 51^\circ$ ). Wie groß muss  $h$  sein, damit der Körper beim Fall 10cm nach Osten abgelenkt wirkt?
- e) Ein (idealisiert punktförmiger) Körper wird in Leipzig senkrecht in die Höhe geworfen. Wie groß muss die Abwurfgeschwindigkeit sein, damit der Körper beim Herunterfallen 10cm westlich von der Abwurfposition landet?

### Aufgabe 10.2

6 Punkte

Wir betrachten die Bewegung eines Skateboarders in einer Halfpipe unter dem Einfluss des Schwerfeldes der Erde. Der Skateboarder sei dabei idealisiert als ein Massenpunkt mit Masse  $m$  angenommen. Die Halfpipe wird modelliert durch einen (idealisiert unendlich langen) Halbzylinder mit Radius  $R$ . Wir wählen Koordinaten so, dass die Mittelachse des Halbzylinders die  $x_1$ -Achse ist und dass die Schwerkraft der Erde in negativer  $x_3$ -Richtung wirkt. Wir nehmen darüber hinaus an, dass der Skateboarder nicht genug Energie hat, um die Halfpipe zu verlassen.

- a) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und drücken Sie in diesen die Zwangsbedingung für die betrachtete Bewegung aus.
- b) Drücken Sie die drei kartesischen Komponenten  $Z_1, Z_2, Z_3$  der Zwangskraft  $\vec{Z}$  durch eine einzige unbekannte skalare Funktion aus, indem Sie verwenden, dass  $\vec{Z}$  senkrecht auf der Halfpipe steht.
- c) Leiten Sie durch Eliminierung der Zwangskraft aus den Newton'schen Gleichungen Bewegungsgleichungen für die nicht durch die Zwangsbedingung festgelegten verallgemeinerten Koordinaten her.
- d) Der Skateboarder habe gerade soviel Energie, dass er den Rand der Halfpipe erreicht. Am Rand der Halfpipe sei sein Körper dabei parallel zur Erdoberfläche. Mit welcher Kraft wird sein Körper in dieser Position "zusammengestaucht"?

Abgabe: Bis Montag 19.12.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.