

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1

4 Punkte

Wir betrachten Galileitransformationen von der Form $T[D, \vec{w}, \vec{s}, \tau]$ mit $\tau = 0$. Wie in der Vorlesung gilt

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T[D, \vec{w}, \vec{s}, 0](\vec{r}) = D\vec{r} + \vec{w}t + \vec{s}.$$

Wir fassen nun Ortsvektor und Zeitkoordinate in einen Vierervektor zusammen.

$$\underline{\vec{r}} = \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{r}}' = \begin{pmatrix} t \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{s}} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\underline{\vec{r}} \in \mathbb{R}^4$. \mathbb{R}^4 nennt man in diesem Zusammenhang *Raumzeit*. Diese Sichtweise wird (in TP2) in der speziellen Relativitätstheorie nützlich sein. Für eine Drehmatrix D und einen Vektor \vec{w} definieren wir eine 4×4 Matrix \underline{D} durch

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ w_2 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ w_3 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

- a) Verifizieren Sie, dass sich die Galileitransformation $T[D, \vec{w}, \vec{s}, 0]$ schreiben lässt als $\underline{\vec{r}}' = \underline{D}\underline{\vec{r}} + \underline{\vec{s}}$, d.h. dass $\underline{D}\underline{\vec{r}} + \underline{\vec{s}}$ tatsächlich $\underline{\vec{r}}'$ entspricht.
- b) Wir definieren eine andere Schreibweise $\underline{T}[\underline{D}, \underline{\vec{s}}]$ für die Galileitransformation $T[D, \vec{w}, \vec{s}, 0]$ durch

$$\underline{\vec{r}}' = \underline{T}[\underline{D}, \underline{\vec{s}}](\underline{\vec{r}})$$

Wir betrachten nun die Hintereinanderausführung von zwei Galileitransformationen $T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, 0]$, $T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, 0]$. Wir definieren \underline{D}_1 , \underline{D}_2 , $\underline{\vec{s}}_1$, $\underline{\vec{s}}_2$ analog zu oben. Dann entspricht die Transformation $\underline{T}[\underline{D}_1, \underline{\vec{s}}_1]$ der Transformation $T[D_1, \vec{w}_1, \vec{s}_1, 0]$ und $\underline{T}[\underline{D}_2, \underline{\vec{s}}_2]$ entspricht $T[D_2, \vec{w}_2, \vec{s}_2, 0]$. Verifizieren Sie

$$\underline{T}[\underline{D}_2, \underline{\vec{s}}_2](\underline{T}[\underline{D}_1, \underline{\vec{s}}_1](\underline{\vec{r}})) = \underline{T}[\underline{D}_3, \underline{\vec{s}}_3](\underline{\vec{r}}), \quad \text{mit} \quad \underline{D}_3 = \underline{D}_2 \underline{D}_1, \quad \underline{\vec{s}}_3 = \underline{D}_2 \underline{\vec{s}}_1 + \underline{\vec{s}}_2.$$

Aufgabe 9.2

4 Punkte

Wir betrachten die möglichen Transformationen

$$\vec{r}'(t) = -\vec{r}(t) \quad (\text{räumliche Spiegelung})$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(-t) \quad (\text{Zeitumkehr}).$$

Zeigen Sie, dass diese beiden Transformationen Inertialsysteme in Inertialsysteme überführen, d.h.

- a) Zeigen Sie, dass für räumliche Spiegelungen gilt $\ddot{r}' = \vec{0}$ genau dann wenn $\ddot{r} = \vec{0}$.
- b) Zeigen Sie, dass für die Zeitumkehr gilt $\ddot{r}' = \vec{0}$ genau dann wenn $\ddot{r} = \vec{0}$.

Aufgabe 9.3

4 Punkte

Donald hat gehört, dass man am Äquator leichter ist als am Nordpol und möchte das überprüfen, weil er es nicht glaubt (er hält es für eine Erfindung der Chinesen). Er kauft eine sehr präzise Waage die auf's Gramm genau wiegt, geht zum Nordpol und stellt sich auf die Waage. Die Waage zeigt $1.2 \times 10^6 \text{g}$. Er geht nun zum Äquator und stellt sich erneut auf seine Waage. Die Waage zeigt wieder $1.2 \times 10^6 \text{g}$. "Ha!" denkt er sich, "Wusste ich's doch!". Dummerweise war Donald bei der zweiten Messung in einem Flugzeug, das entlang des Äquators flog.

- a) Wie schnell flog das Flugzeug und in welche Richtung? Beantworten Sie die Frage unter der Annahme, dass auf Donald die Schwerkraft, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft wirken. Verwenden Sie $|\vec{\Omega}| = 2\pi/(1\text{Tag})$ und nehmen Sie an, dass der Radius der Erde 6400km groß ist.

Hinweise: Die Schwerkraft am Nordpol und am Äquator im Flugzeug sollen Sie als betragsmäßig gleich groß annehmen – wir vernachlässigen also die Abhängigkeit der Schwerkraft vom Abstand zum Erdmittelpunkt und die Tatsache dass die Erde abgeplattet ist (tatsächlich sind diese vernachlässigten Effekte von der selben Größenordnung wie die hier betrachteten). Verwenden Sie ein rotierendes Bezugssystem mit dem Ursprung O' im Mittelpunkt der Erde. Die Wahl der mitrotierenden Koordinatenachsen \vec{e}'_i spielt für die Lösung der Aufgabe keine Rolle – es ist nur wichtig, dass diese bezüglich der betrachteten Punkte auf der Erdoberfläche fest sind, also aus Sicht eines Inertialsystems mitrotieren; dann sind die Formeln für die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft gültig. Auch wenn die explizite Wahl von \vec{e}'_i für die Lösung keine Rolle spielt, dürfen Sie, wenn es Ihnen hilft, das in der Vorlesung diskutierte System \vec{e}'_i verwenden.

Abgabe: Bis Montag 12.12.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.