Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1 6 Punkte

Wir haben bereits gesehen, dass sich die Kenntnis von Erhaltungsgrößen verwenden lässt, um Bewegungsgleichungen einfacher zu lösen. In der Praxis lassen sich damit Lösungen mit weniger oder ganz ohne Integrationen angeben. In dieser Aufgabe soll das Kepler-Problem ohne Integration gelöst werden, indem die Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors verwendet wird.

Wir wiederholen einige Definitionen ...

$$\vec{L}_{\text{rel}} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\,, \qquad l = |\vec{L}_{\text{rel}}|\,, \qquad E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + U\,, \qquad U = -\frac{\kappa}{r}\,, \qquad U_0 = -\frac{\kappa^2\mu}{2l^2}$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}}\times\vec{L}_{\text{rel}} + U\vec{r}\,, \qquad p = \frac{l^2}{\mu\kappa}\,, \qquad \epsilon = \sqrt{1-\frac{E_{\text{rel}}}{U_0}}$$

... und zwei nützliche Identitäten, die für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gültig sind

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \qquad \text{(“BAC-CAB-Regel”)}\,,$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \qquad \text{(“Spatproduktregel”)}\,.$$

a) Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ beliebige Vektoren. Wir definieren $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. Verfizieren Sie die Identität:

$$(\vec{b}\times\vec{c})^2 = \vec{b}^2\vec{c}^2\,.$$

Hinweis: verwenden Sie die BAC-CAB-Regel nur für einen der beiden Faktoren.

b) Verwenden Sie die obigen Definitionen und Identitäten, sowie ihr Ergebnis aus a) um zu zeigen dass

$$\vec{A}^2 = \dot{\vec{r}}^2\vec{L}_{\text{rel}}^2 + \frac{2U}{\mu}\vec{L}_{\text{rel}}^2 + U^2r^2\,.$$

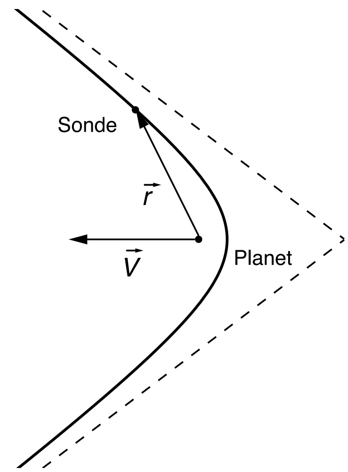
c) Folgern Sie, dass $|\vec{A}| = \kappa\epsilon$.

d) Wir definieren den Winkel φ durch $\vec{A}\cdot\vec{r} = |\vec{A}|r\cos(\varphi)$. Zeigen Sie

$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi)}\,.$$

Aufgabe 8.2 6 Punkte

1977 hat die NASA die beiden Voyager-Raumsonden gestartet, die inzwischen das Sonnensystem verlassen haben. Die Geschwindigkeit, die nötig ist, um dem Schwerefeld der Sonne zu entkommen, kann nicht durch reine Schubkraft erreicht werden, dafür wäre zuviel Treibstoff nötig. Daher wurden die Sonden nach dem Start auf der Erde durch mehrere *Swingby-Manöver* zusätzlich beschleunigt. Bei solch einem Manöver fliegt die Sonde an einem Planeten vorbei und wird durch dessen Schwerefeld relativ zur Sonne beschleunigt.



Für die Betrachtung der Bewegung der Sonde vernachlässigen wir die Anziehungskraft der Sonne (und der anderen Planeten) auf die Sonde. Im Ruhesystem des betrachteten Planeten beschreibt die Bahn der Sonde dann eine Hyperbel. Die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde im Ruhesystem des Planeten seien $\vec{w}_-$ (vor dem Vorbeiflug) und $\vec{w}_+$ (nach dem Vorbeiflug). D.h. es gilt

$$\lim_{t\to\pm\infty} \dot{\vec{r}}(t) = \vec{w}_\pm\,.$$

Der Planet habe die Masse m_2. Die Sonde habe die Masse m_1 ($= \mu$ da $m_2 \gg m_1$) und im Ruhesystem des Planeten die Energie E sowie den Drehimpuls $\vec{L}$

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\kappa}{r} = \frac{m_1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2m_1 r^2} - \frac{\kappa}{r}\,, \qquad \kappa = G m_1 m_2\,, \qquad |\vec{L}| = l\,.$$

Der Planet habe im Ruhesystem der Sonne die Geschwindigkeit $\vec{V}$ – für die hier relevanten Zeitskalen können wir $\vec{V}$ als konstant annehmen. Wir definieren den Winkel α durch

$$\vec{w}_+ \cdot \vec{V} = |\vec{w}_+| V\cos(\alpha)\,, \qquad V = |\vec{V}|\,.$$

Wir betrachten hier die symmetrische Situation, in der auch gilt (siehe Skizze):

$$\vec{w}_- \cdot \vec{V} = -|\vec{w}_-| V\cos(\alpha)\,.$$

a) Es sei $w = |\vec{w}_+|$. Warum gilt $|\vec{w}_-| = w$? Berechnen Sie w aus den gegebenen Größen.

b) Folgern Sie aus der Diskussion des Kepler-Problems in der Vorlesung, dass $\cos(\alpha) = 1/\epsilon$ mit $\epsilon = \sqrt{1 - E/U_0}$, $U_0 = -\kappa^2 m_1/(2l^2)$. Verwenden Sie wenn nötig eine Skizze.

c) Wir bezeichnen die asymptotischen Geschwindigkeiten der Sonde im Ruhesystem der Sonne mit $\vec{v}_\pm$. Zeigen Sie $\vec{v}_+^2 - \vec{v}_-^2 = 4wV/\epsilon > 0$. Was gilt, wenn wir $\vec{V}$ durch $-\vec{V}$ ersetzen?

d) Argumentieren Sie, dass man bereits ohne Rechnung folgern kann, dass die Energie der Sonde im Ruhesystem der Sonne nicht erhalten ist.

Abgabe: Bis Montag 5.12.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.