Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Ein Teilchen bewege sich in einer Dimension im Potential

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\kappa}{r}\,.$$

Hierbei sind l, μ, κ positive Konstanten und r kann positive reelle Werte annehmen, d.h. $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie U und markieren Sie in ihrer Skizze alle stabilen und labilen Gleichgewichtspunkte (sofern vorhanden).

b) Berechnen Sie die r- und U-Werte aller Gleichgewichtspunkte.

c) Es sei r_s der Gleichgewichtspunkt mit dem größten r. Nähern Sie für $|r - r_s| \ll r_s$ das Potential U durch ein harmonisches Potential U_H an.

d) Das Teilchen habe die möglichen Gesamtenergien

$$E_1 = -\frac{\kappa^2\mu}{2l^2}\,, \qquad E_2 = -\frac{\kappa^2\mu}{4l^2}\,, \qquad E_3 = \frac{\kappa^2\mu}{4l^2}\,.$$

Bestimmen Sie für jede dieser drei Energien rechnerisch die erlaubten Aufenthaltsorte des Teilchens, d.h. die erlaubten Werte für r.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

Ein Teilchen in drei Raumdimensionen bewege sich in einem homogenen und zeitlich konstanten Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

a) Lösen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}$ mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie für Ihre Lösung den Drehimpuls $\vec{L} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$.

c) Für welche Werte von f_1 und f_2 ist $\vec{L}$ erhalten?

Aufgabe 7.3 4 Punkte

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes mit konstanter Masse m in drei Raumdimensionen in einem rotationssymmetrischen Potential $U = U(r)$ ($r = |\vec{r}|$). Der *Runge-Lenz-Vektor* $\vec{A}$ ist definiert als

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + U\vec{r}\,,$$

dabei ist $\vec{L}$ der Drehimpuls.

a) Verwenden Sie (unter anderem) die Newton'sche Bewegungsgleichung und die Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

um zu zeigen, dass ($\vec{F} = -\vec{\nabla}U$)

$$\dot{\vec{A}} = \left(U - \vec{F} \cdot \vec{r}\right) \dot{\vec{r}}.$$

b) Folgern Sie daraus, dass $\vec{A}$ für das Gravitationspotential $U(r) = -\frac{\kappa}{r}$ (κ konstant) erhalten ist.

c) Folgern Sie aus a), dass $\vec{A}$ für das harmonische Potential $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (k konstant) nicht erhalten ist.

Abgabe: Bis Montag 21.11.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.