Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 6 Punkte

Verifizieren Sie folgende Identitäten durch explizites Nachrechnen.

a) $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (r = |\vec{r}|)$

b) $U(\vec{r}) = \frac{1}{2} k \vec{r}^2$ ist ein Potential für das (somit konservative) harmonische Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$.

c) $U(\vec{r}) = G\frac{m_1 m_2}{r}$ ist ein Potential für das (somit konservative) Gravitationsfeld $\vec{F}(\vec{r}) = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$.

Hinweis: für b) und c) dürfen aber müssen Sie nicht verwenden dass für $U(\vec{r}) = f(r)$ mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\vec{\nabla} U(\vec{r}) = \frac{df(r)}{dr}\vec{\nabla} r$.

Aufgabe 3.2 2 Punkte

Wir betrachten die Kurve $\vec{r}(t)$ und das Potential $U(\vec{r})$ definiert als

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ t+1 \end{pmatrix} \qquad U(\vec{r}) = (x_1 + 2x_3)^2 + \sqrt{x_2}\,.$$

Verifizieren Sie folgende Identiät durch explizites Nachrechnen:

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} U(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,.$$

Aufgabe 3.3 4 Punkte

Gegeben sind die beiden Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \\ 3x_3^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie ob diese konservativ sind oder nicht indem Sie die entlang eines geschlossenen Weges geleistete Arbeit berechnen. Benutzen Sie dafür den geschlossenen Weg

$$C_\circ(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = C_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cup C_2(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \cup C_3(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \cup C_4(\vec{r}_4, \vec{r}_1)\,,$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Teilstücke C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sollen dabei alle Geraden sein.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Verwenden Sie $\displaystyle\int_{C_\circ} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

b) Verwenden Sie, dass für einen beliebigen Weg $C(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$ und eine beliebige entsprechende Kurvenfunktion $\vec{r}(t)$ mit $\vec{r}(t_a) = \vec{r}_a$, $\vec{r}(t_b) = \vec{r}_b$ gilt: $\displaystyle\int_{C(\vec{r}_a, \vec{r}_b)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$

c) Verwenden Sie für alle Teilwege lineare Kurvenfunktionen, z.B. für $C_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ die Kurvenfunktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Für Ehrgeizige: wählen Sie statt $C_\circ$ den Weg

$$C'_\circ(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = C_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \; \cup \; C_5(\vec{r}_2, \vec{r}_6) \; \cup \; C_6(\vec{r}_6, \vec{r}_7) \; \cup \; C_7(\vec{r}_7, \vec{r}_8) \; \cup \; C_8(\vec{r}_8, \vec{r}_4) \; \cup \; C_4(\vec{r}_4, \vec{r}_1)\,,$$

$$\vec{r}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei erneut alle Teilstücke Geraden sind.

Abgabe: Wegen des Feiertages bis Freitag 04.11.2016, vor der Übungsgruppe. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.