Dr. T.-P. Hack

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2016/17

Übungen zu TP1 - Theoretische Mechanik (StEx Lehramt)

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 6 Punkte

Die Bahnkurve einer betrunkenen Biene in einem Inertialsystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sei gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ w_0 t + z_0 \end{pmatrix},$$

dabei sind R, ω, w_0, z_0 positive Konstanten mit geeigneten Einheiten.

a) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung dieser Bahnkurve im gegebenen Inertialsystem.

b) Wir betrachten nun ein weiteres Inertialsystem $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ mit $\overrightarrow{O'O}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. Skizzieren Sie die Bahnkurve in beiden Inertialsystemen.

c) Geben Sie die Kraft an, die auf die Biene im Inertialsystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ wirkt. Was gilt für diese Kraft im System $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?

d) Es sei nun $R = 10$cm, $w_0 = 23.14$cm/s, $z_0 = 4.67$cm. Untersuchungen haben gezeigt, dass Bienen bei einer Beschleunigung (gemeint ist der Betrag $|\vec{a}|$) von mehr als $10g$ schlecht wird, wobei $g = 9.81$m/s^2 die Erdbeschleunigung ist. Der Biene ist schlecht. Bestimmen Sie die dazu passenden Werte für ω im Inertialsystem $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Was gilt im Inertialsystem $(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$? Interpretieren Sie ω und Ihr Ergebnis physikalisch.

Aufgabe 2.2 6 Punkte

Wir betrachen die folgende Aussage: "Die Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \tag{1}$$

in einem zeitlich konstanten und homogenen Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}_0$ und mit Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0\,, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \text{zum Zeitpunkt } t_0 = 0 \tag{2}$$

ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.\text{"}$$

a) Verfizieren Sie diese Aussage durch nachrechnen der Gleichungen (1) und (2).

b) Wir wählen nun einen anderen Anfangszeitpunkt $t = t_1$. Berechnen Sie die Anfangsbedingungen $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ und $\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}(t_1)$ und drücken Sie $\vec{r}(t)$ durch $\vec{F}_0$ und diese neuen Anfangsbedingungen aus.

c) Wir betrachten die Bahnkurve eines Wurfes im Schwerefeld der Erde (unter Vernachlässigung der Luftreibung). Wir definieren

$$\vec{F}_0 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die auftretenden Konstanten. Berechnen Sie die Wurfweite, d.h. $w = x_1(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 an dem gilt $x_3(t_2) = 0$. Zum Weiterrechnen falls sie Schwierigkeiten haben: das Ergebnis lautet

$$w = \frac{v_0^2\cos(\alpha)}{g}\left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2r_0 g}{v_0^2}}\right)$$

d) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \cos(x)\sin(x)$ und bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Skizze für den Fall $r_0 = 0$ den optimalen Abwurfwinkel, d.h. den Winkel α der – für beliebiges aber festes v_0 – zu der größtmöglichen Wurfweite führt.

e) Bestimmen Sie qualitativ wie sich der optimale Abwurfwinkel mit steigendem r_0 ändert. Skizzieren Sie dazu die Funktion $f(x) = \cos(x)(\sin(x) + \sqrt{\sin^2(x) + y})$ für $y = 0, 10, 100$. Sie können dazu z.B. auf `wolframalpha.com` die Eingabe

```
plot cos x ( sin x + sqrt ( sin^2  x + y ) )  from x = 0 to x = pi/2
```

verwenden.

Abgabe: Bis Montag 24.10.2016, vor der Vorlesung. Sie können Lösungen alleine oder zu zweit abgeben.