Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy WS 2014/15

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

14. Übungsblatt

Aufgabe 33*: *Korrelationsfunktion* **(6 Zusatzpunkte)**

Betrachten Sie wieder das Ginzburg-Landau-Funktional L aus Aufgabe 32.

a) Zeigen Sie, dass in harmonischer Näherung $\langle|\psi_{\boldsymbol{q}}|^2\rangle = h_{\boldsymbol{q}}$ die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt,

$$(|\boldsymbol{q}|^2 + \xi^{-2})h_{\boldsymbol{q}} = C\,,$$

wobei $C = \mathrm{const}$ und $\xi \propto |t|^{-1/2}$ die Korrelationslänge der Ordnungsparameterfluktuationen bezeichnet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

i) Überlegen Sie sich, dass die komplexen Fourier-Komponenten $\psi_{\boldsymbol{q}}$ nicht unabhängig sind. Geben Sie explizit die Abhängigkeiten für den Real- und Imaginärteil von $\psi_{\boldsymbol{q}}$ und $\psi_{-\boldsymbol{q}}$ an. (0.5ZP)

ii) Berechnen Sie den Mittelwert

$$\langle|\psi_{\boldsymbol{q}}|^2\rangle = \left(\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\psi_{\boldsymbol{q}}\,|\psi_{\boldsymbol{q}}|^2 \mathrm{e}^{-\beta L}\right)\left(\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\psi_{\boldsymbol{q}}\,\mathrm{e}^{-\beta L}\right)^{-1}$$

indem Sie $\psi_{\boldsymbol{q}}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen. Damit beweisen Sie den Gleichverteilungssatz. (2.5ZP)

Hinweis: Verwenden Sie folgende Fourier-Transformationen,

$$\psi_{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,, \qquad \psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{q}}\psi_{\boldsymbol{q}}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,, \qquad \delta(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{V}\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$$

b) Nutzen Sie das Resultat aus der Teilaufgabe a) um zu zeigen, dass $h(\boldsymbol{r})$ folgende partielle Differentialgleichung erfüllt, (1ZP)

$$\Delta h(\boldsymbol{r}) - \xi^{-2}h(\boldsymbol{r}) = -C\delta(\boldsymbol{r})\,.$$

c) Für $h(\boldsymbol{r}) = h(r)$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^d$ und $r \equiv |\boldsymbol{r}| > 0$ schreiben Sie das Ergebnis aus b) auf die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}r^2} + \frac{(d-1)}{r}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} - \frac{h}{\xi^2} = 0$$

um. Lösen Sie die Differentialgleichung für die Fälle $\xi \to \infty$ und $r \to \infty$. (2ZP)

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $h(r) = r^{-\alpha}\mathrm{e}^{-r/\xi}$.

Aufgabe 34: *Quantenstatistik des harmonischen Oszillators* **(2 Punkte)**

Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + m\omega^2\hat{x}^2/2$.

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und geben Sie die Dichtematrix in Energie-Eigendarstellung an. Beweisen Sie, dass die Dichtematrix in Ortsdarstellung nicht diagonal sein kann.

b*) Berechnen Sie die Dichtematrix in Ortsdarstellung. **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 35: *Kanonische Zustandsummen für (wenige) Fermi- und Bose-Teilchen* **(4 Punkte)**

a) Betrachten Sie ein System von zwei identischen Teilchen mit dem gleichen Eigendrehimpuls (z. B. Spin $+1/2$), deren jedes die Energie 0, $\mathcal{E}$ und $2\mathcal{E}$ besitzen kann. Der niedrigste Energiezustand sei zweifach entartet. Zählen Sie sorgfältig die Konfigurationen ab und berechnen Sie die kanonische Zustandssumme und die mittlere Energie für

i) Fermi-Teilchen, (1P)

ii) Bose-Teilchen und (1P)

iii) klassische ununterscheidbare Teilchen. (1P)

b) Welche Voraussetzungen sind allgemein wünschenswert, damit Fermi- bzw. Bose-Teilchen als klassisch angesehen werden können? (1P)

gesamt: 6 + 8 Punkte

Abgabe: **Do. 29.01.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.