Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy WS 2014/15

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

12. Übungsblatt

Aufgabe 27: *Ideales Gas großkanonisch* **(4 Punkte)**

Der Hamiltonian eines idealen Gases mit Volumen V in einem externen Potential $U(\boldsymbol{r})$ ist gegeben durch

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}_i) \right).$$

a) Zeigen Sie, dass die großkanonische Zustandssumme in die Form

$$Z_{\mathrm{G}}(V,T,z) = \mathrm{e}^{zq(V,T)}$$

gebracht werden kann, wobei

$$q(V,T) = \frac{(2\pi m/\beta)^{3/2}}{h^3} \int_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \mathrm{e}^{-\beta U(\boldsymbol{r})}$$

ist. Bestimmen Sie die thermische Zustandsgleichung $p = p(T,V,\langle N\rangle)$. (2P)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die kanonische Zustandssumme und leiten Sie aus dieser die großkanonische Zustandssumme her.

b) Zeigen Sie, dass die Varianz der Teilchenzahl (mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert) in folgender Form ausgedrückt werden kann,

$$\sigma_N^2 = \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = z\frac{\partial}{\partial z} z\frac{\partial}{\partial z} \ln\left(Z_G(V,T,z)\right),$$

und bestimmen Sie, wie die relative Fluktuationsbreite $\sigma_N/\langle N\rangle$ von der mittleren Teilchenzahl $\langle N\rangle$ abhängt. (2P)

Aufgabe 28: *„Mischungsentropie" und Gibbs-Paradoxon* **(6 Punkte)**

Zwei ideale einatomige Gase seien in zwei Kammern (Volumina V_1 und V_2, Teilchenzahlen N_1 und N_2) eines Behälters zunächst durch eine wärmeundurchlässige Wand voneinander getrennt. Die Temperaturen der Gase seien T_1 und T_2, die Drücke $p_1 = p_2 = p$ jedoch gleich. Nach Entfernen der Trennwand findet eine Durchmischung der Gase statt.

a) Bestimmen Sie (thermodynamisch) die Mischungstemperatur T_m. (1P)

b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Gesamtsystems als Funktion der Volumina und Temperaturen. (2P)

Hinweis: Die Durchmischung ist ein irreversibler Prozess. Überlegen Sie sich daher einen geeigneten reversiblen Ersatzprozess.

c) Spezialisieren Sie das Ergebnis aus b) nun auf den Fall, dass die anfänglichen Temperaturen der Teilsysteme gleich waren ($T_1 = T_2$). Die verbleibende Entropieänderung wird oft „Mischentropie" genannt. Argumentieren Sie, dass sie nicht vom Mischen herrührt (wovon stattdessen)? (1P)

d) Argumentieren Sie, dass die in c) berechnete Entropieänderung nicht auftritt, wenn beide Kammern anfänglich mit dem gleichen Gas gefüllt sind, und geben Sie die Entropiebilanz für diesen Fall an. (2P)

Hinweis: Hier kann sowohl thermodynamisch als auch statistisch mechanisch gerechnet werden.

Aufgabe 29*: *Benfordsches Gesetz* **(2 Zusatzpunkte)**

Um Steuersündern auf die Schliche zu kommen, greifen Finanzbehörden gelegentlich auf die Beobachtung zurück, dass die signifikanten Ziffern vieler empirisch erhobener Datenreihen nicht gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 9\}$ sind, sondern einem anderen universellen Gesetz folgen. Leiten Sie die Form dieses Gesetzes unter der Annahme her, dass es seine Gültigkeit bei Verwendung anderer Maßeinheiten behält.

Hinweis: Stellen Sie die Zahlen in der Form $m \times 10^n$ mit $m \in [1/10, 1)$ dar und betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von m.

gesamt: 10 + 2 Punkte

Abgabe: **Do. 15.01.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.