Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy

WS 2014/15

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

10. Übungsblatt

Aufgabe 22: *Entropie des idealen Gases* **(5 Punkte)**

a) Betrachten Sie die mit der Einteilchendichte und die mit der N-Teilchendichte gebildete Boltzmann-Entropie, wie in der Vorlesung eingeführt. Zeigen Sie, dass beide sich für ein kräftefreies ideales Gas im Gleichgewicht auf das aus der Thermodynamik bekannte Ergebnis reduzieren. Achten Sie auf die korrekte Wahl des Integrationsmaßes und nutzen Sie aus, dass $N \gg 1$ ist. (4P)

b) Beseitigen Sie den „Schönheitsfehler“ des dimensionsbehafteten Arguments des Logarithmus durch Einfügen der Planckschen Konstante h (Sie erhalten dann die sogenannte *Sackur-Tetrode-Gleichung*, den Hochtemperatur-Grenzfall der Entropie eines Quantengases). Wie sind die N-Teilchendichte und das Integrationsmaß zu modifizieren, damit sich diese Reparatur erübrigt? (1P)

c*) Zeigen Sie mithilfe von b), dass die Fugazität $z = \mathrm{e}^{\beta\mu}$ eines klassischen idealen Gases der Dichte n die Form $z = n\lambda_T^3$ hat, und stellen Sie den Zusammenhang von λ_T mit der de-Broglie-Wellenlänge her. Was ist also die Bedeutung der Fugazität bzw. wann gilt b)? Interpretieren Sie dies im Hinblick auf den dritten Hauptsatz. **(2 Zusatzpunkte)**

Aufgabe 23: *Zentraler Grenzwertsatz* **(5 Punkte)**

Ein Teilchen befinde sich mit der Wahrscheinlichkeit $w(\mathcal{E})\mathrm{d}\mathcal{E}$ in einem Zustand mit der Energie $\mathcal{E}$. Die mittlere Energie pro Teilchen eines Systems von N nichtwechselwirkenden Teilchen ist $\bar{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i/N$.

a) Geben Sie einen formalen Integralausdruck für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\bar{\mathcal{E}})$ der mittleren Teilchenenergie $\bar{\mathcal{E}}$ an. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck in die folgende Form gebracht werden kann, (2P)

$$p(\bar{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \ \mathrm{e}^{-ik\bar{\mathcal{E}}} \, Q^N(k/N) \, ,$$

wobei

$$Q(k/N) = \langle \mathrm{e}^{i(k/N)\mathcal{E}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mathcal{E} \, w(\mathcal{E}) \, \mathrm{e}^{i(k/N)\mathcal{E}} \ .$$

b) Entwickeln Sie zunächst $Q(k/N)$ und danach $\ln\big(Q(k/N)\big)$ in Taylorreihen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/N^3)$. Vernachlässigen Sie die Terme kubischer und höherer Ordnung in $1/N$ und benutzen Sie die Näherung um zu zeigen, dass für $N \to \infty$

$$p(\bar{\mathcal{E}}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{\mathcal{E}}}^2}} \exp\left(- \frac{(\bar{\mathcal{E}} - \langle\mathcal{E}\rangle)^2}{2\sigma_{\bar{\mathcal{E}}}^2} \right)$$

gilt. Dabei ist $\sigma_{\bar{\mathcal{E}}}^2 = \sigma_{\mathcal{E}}^2/N$ die Varianz der mittleren Energie pro Teilchen. (2P)

c) Bestimmen Sie aus dem Endresultat der Teilaufgabe b) die explizite Form von $w(\mathcal{E})$ im thermodynamischen Limes, $N \to \infty$. (1P)

gesamt: 10 + 2 Punkte

Abgabe: **Do. 18.12.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.