Universität Leipzig
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K. Kroy WS 2014/15

Theoretische Physik III
Thermodynamik und statistische Mechanik

---

9. Übungsblatt

Aufgabe 19: *Stirling-Formel* **(6 Punkte)**

a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-at} \equiv \frac{1}{a}\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

und deren Ableitungen. Leiten Sie daraus her die folgende Gleichung (1P)

$$n! = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t} t^n\,.$$

Bemerkung: Diese Methode ist bekannt als „Differenzieren unter dem Integral“ oder auch „Feynmanscher Integrationstrick“.

b) Auf der rechten Seite der obigen Gleichung für $n!$ muss n nicht notwendigerweise eine ganze Zahl sein. Die verallgemeinerte Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}$$

nennt sich Gamma-Funktion. Verwenden Sie diese Definition um die Identitäten $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1) = 1$ zu überprüfen. (1P)

c) Beweisen Sie die Abschätzung $n! \sim \sqrt{n}\mathrm{e}^{1-n}n^n$. (2P)

Hinweis: Schreiben Sie $\ln(n!)$ als Summe und verwenden Sie die Trapezregel, um die Summe durch ein Integral abzuschätzen.

d) Für Funktionen $f(t)$ mit einem globalen Maximum bei $t = t_{\mathrm{max}} \in (a, b)$ bietet sich folgende Näherung („Sattelpunktsnäherung“ oder auch „Laplace-Methode“) an,

$$\int_a^b \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{Mf(t)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(t_{\mathrm{max}})|}}\, \mathrm{e}^{Mf(t_{\mathrm{max}})}\,, \qquad M \gg 1\,,$$

die durch explizite Integration überprüft werden kann. Wenden Sie die Sattelpunktsnäherung auf $\Gamma(n+1)$ an, um eine Abschätzung für $n!$ zu erhalten. (2P)

Aufgabe 20: *Petersburg Paradoxon* **(2 Punkte)**

Ein Bankier wirft ein Münze, bis sie *Kopf* zeigt. Der Spieler gewinnt 2^n Münzen, wenn n-mal *Zahl* vor dem ersten *Kopf* fällt. Was ist sein wahrscheinlichster Gewinn? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens x Münzen zu gewinnen? Was ist der faire Preis für ein Spiel?

Aufgabe 21: *Kugelvolumen und Kugeloberfläche im d-dimensionalen Raum* **(4 Punkte)**

Eine d-dimensionale Kugel mit Radius r ist definiert durch

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = r^2 \,,$$

wobei x_i, $i = 1, \ldots, d$, kartesische Koordinaten bezeichnen.

a) Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche dieser Kugel. (2P)

b) Bestimmen Sie die Schichtdicke Δr, für die das Volumen der Kugelschale gleich dem Volumen der (inneren) Kugel ist. Betrachten Sie speziell den Grenzfall $d \to \infty$. (2P)

Hinweis: Betrachten Sie das Integral

$$I_d = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_d \; \mathrm{e}^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2)} \,.$$

gesamt: 12 Punkte

Abgabe: **Do. 11.12.**, vor der Vorlesung
Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Zusatzaufgaben und gehen nicht in die reguläre Wertung ein.