

# Eine stochastische verzögerte Differentialgleichung und ihr Stabilitätsgebiet im Parameterraum

Theoretikum  
Christian Brettschneider

16. März 2006

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Stabilitätsgebiet des deterministischen Systems</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Verhalten im marginal stabilen Fall</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Störung durch ein multiplikatives Rauschen</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Analytische Berechnungen mit dem Momentenkriterium</b>	<b>7</b>
5.1	Shapiro-Loginov . . . . .	7
5.2	Furutsu-Novikov . . . . .	10
5.3	Verwendung der Eigenschaft des Ito-Integrals . . . . .	11
5.4	Ergebnis des Momentenkriteriums . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Sample-Stability-Kriterium</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Simulation des Systems</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Ausblick</b>	<b>17</b>

# 1 Einleitung

Viele realistische Probleme aus der Natur erfordern in ihrer Formulierung einen verzögerten Term. Ein wichtiges Beispiel ist etwa das Wachstum einer Population, die eine charakteristische Zeit  $\tau$  benötigt, um sich zu reproduzieren. Dieses kann durch eine verzögerte logistische Gleichung beschrieben werden. Ebenso wird in der Natur beobachtet, wie sich verschiedene Populationen gegenseitig beeinflussen. Das verzögerte Lotka-Volterra-System beschreibt etwa die Populationsdynamik von Füchsen und Hasen. Es wird auch Räuber-Beute-System genannt.

Typische Effekte der Einbeziehung eines Terms  $x(t - \tau)$  sind die Destabilisierung bzw. Stabilisierung von Fixpunkten oder das Auftreten von Oszillationen bereits bei einer linearen Differenzialgleichung (DGL) 1. Ordnung. Letzteres wird auch in dem Beispiel beobachtet, welches dieses Theoretikum behandelt.

Zunächst werden einige Ergebnisse aus der Diplomarbeit von Micaela Krieger [Kri97] reproduziert. In ihrer Arbeit wurde das System durch ein buntes Rauschen, den dichotomen Markovprozess, gestört. Dieses Theoretikum untersucht in Analogie zu der Diplomarbeit das Verhalten bei einer Störung durch ein Gaußsches weißes Rauschen.

Möchte man Aussagen über die Lösungen dieser Systeme treffen, so kann man bekannte Methoden aus der Theorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen übernehmen. Aber auch neue Verfahren werden eingeführt.

## 2 Stabilitätsgebiet des deterministischen Systems

Für eine lineare Stabilitätsanalyse eines Systems von Differentialgleichungen betrachtet man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t) \forall t \in [-\tau, 0]$ . Den Fixpunkt  $\mathbf{x}_0$  erhält man durch die Forderung  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$ . Um das Verhalten kleiner Abweichungen vom Fixpunkt zu studieren, setzen wir  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$  mit  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{c}e^{st}$  ein. In linearer Näherung gilt in der Nähe des Fixpunktes:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 e^{-s\tau})\boldsymbol{\varepsilon}(t). \quad (2)$$

Die Bestimmung der Lösungen der charakteristischen Gleichung reduziert sich auf die Bestimmung der Eigenwerte der Jacobimatrix  $\mathbf{F}'$ . Es folgt

$$h(s) = \det(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 e^{-s\tau}) - s\mathbf{I}) = H_0(s) + H_1(s)e^{-s\tau} + H_2(s)e^{-2s\tau} + \dots = 0 \quad (3)$$

Nach [BC63] wird das asymptotische Verhalten der Lösung des Gleichungssystems (1) für  $t \rightarrow \infty$  durch die charakteristische Wurzel mit maximalem Realteil bestimmt. Das Gleichungssystem nennen wir marginal stabil, wenn  $\max_n \operatorname{Re}(s_n) = 0$  gilt.

Zunächst wird ein grundlegendes Beispiel einer zeitverzögerten Differentialgleichung betrachtet

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t), \quad x(t) = g(t) \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (4)$$

Für  $g(t) = x_0 = \text{const}$  stellt man fest, dass der Fixpunkt  $x(t) = x_0$  eine Lösung der sogenannten Differenzdifferentialgleichung (DDGL) unter der Bedingung  $a = b$  darstellt. Unter der Bedingung  $a \neq b$  ist  $x_0 = 0$  der einzige Fixpunkt.

Um die Stabilitätseigenschaften dieser Fixpunkte zu bestimmen, benötigen wir die charakteristische Gleichung. Der Exponentialansatz  $x(t) = x_0 + \varepsilon(t) = x_0 + ce^{st}$  führt uns zu

$$h(s) \equiv s + b - ae^{-s\tau} = 0. \quad (5)$$

$h(s)$  wird charakteristisches Quasipolynom genannt.

Die Lösung von Gleichung (5) ergibt die im allgemeinen unendlich vielen komplexen charakteristischen Wurzeln  $s_n$ . Spalten wir  $s = \nu + i\omega$  in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir die beiden reellen Gleichungen

$$\nu + b - ae^{-\nu\tau} \cos(\omega\tau) = 0, \quad (6)$$

$$\omega + ae^{-\nu\tau} \sin(\omega\tau) = 0. \quad (7)$$

Um die Stabilitätsgrenze von Gleichung (4) zu bestimmen, müssen wir ausrechnen, für welche Werte  $(\omega, \tau)$  ein konjugiert komplexes Paar von charakteristischen Wurzeln die imaginäre Achse überschreitet.

Das Umstellen der Gleichung  $h(i\omega) = 0$  ergibt  $\frac{i\omega+b}{a} = e^{-i\omega\tau}$ . Die linke Seite stellt eine Gerade in der komplexen Ebene dar. Die rechte Seite ist der Einheitskreis, vgl. Abbildung 1.

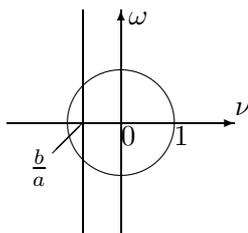


Abbildung 1: geometrische Veranschaulichung der Lösungen von  $\frac{i\omega+b}{a} = e^{-i\omega\tau}$ .

Aus ihren Schnittpunkten kann man feststellen, zu welchen  $\omega$  und  $\tau$  die imaginäre Achse zum ersten Mal überschritten wird [Mac89]

$$\omega = \pm\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos\left(\frac{b}{a}\right). \quad (8)$$

Man kann sich auf den Fall  $\omega \geq 0$  beschränken.

Umgekehrt kann man auch die  $a, b$  für vorgegebene  $\omega$  und  $\tau$  bestimmen

$$a = \frac{-\omega}{\sin(\omega\tau)}, \quad b = -\omega \cot(\omega\tau). \quad (9)$$

In Abbildung 1 kann man erkennen, dass  $s = 0$  unter der Bedingung  $a = b$  der führende Eigenwert der charakteristischen Gleichung (5) ist.

Mit diesem Wissen sind wir in der Lage, das Stabilitätsgebiet im Parameterraum  $(a, b)$  für ein festes  $\tau$  zu konstruieren. Es ergibt sich ein kegelförmiges Gebiet stabiler Lösungen  $x(t)$ , siehe Abbildung 2. Man beachte, dass dieses Gebiet unabhängig von der Wahl der Anfangsfunktion  $g(t)$  ist.

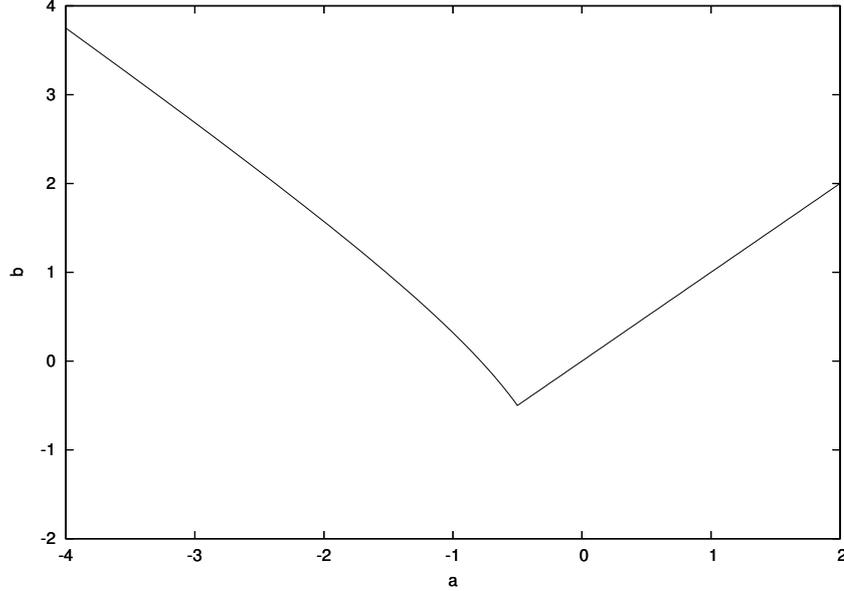


Abbildung 2: Stabilitätsgebiet des deterministischen Systems: Für  $a \geq -0,5$  existieren reelle charakteristische Wurzeln  $s$ . Die Lösung besitzt die Form  $x(t) = x_0 e^{st}$ . Für  $a \leq -0,5$  gibt es nur komplexe Wurzeln. Die Lösungen haben oszillatorisches Verhalten. Im oberen Bereich gilt  $\max_n \operatorname{Re}(s_n) < 0$  (stabil), im unteren Bereich gilt  $\max_n \operatorname{Re}(s_n) > 0$  (instabil).

### 3 Verhalten im marginal stabilen Fall

Wir konnten feststellen, dass unter der Bedingung  $a = b$  das deterministische System marginal stabil ist. In einigen Veröffentlichungen ([BLM<sup>+</sup>93a], [BLM<sup>+</sup>93b] und [Lip95]) ist ein kennzeichnendes Merkmal marginaler Stabilität diskutiert worden: Es besteht die Möglichkeit, einen Fixpunkt durch eine Störung beliebiger Form zu verschieben.

Zunächst wollen wir Gleichung (4) in Abhängigkeit einer Anfangsfunktion  $g(t)$  mittels Laplacetransformation lösen

$$\int_0^\infty dt \dot{x} e^{-st} = \int_0^\infty dt ax(t-\tau)e^{-st} - \int_0^\infty dt bx(t)e^{-st}. \quad (10)$$

Auf der linken Seite integrieren wir partiell, auf der rechten substituieren wir das verzögerte Argument. Auf dem Intervall  $[-\tau, 0]$  können wir die Anfangsfunktion einsetzen

$$\underbrace{[x(t)e^{-st}]_0^\infty}_{=-x(0)=-g(0)} + s \int_0^\infty dt x(t)e^{-st} = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^\infty dt ax(t)e^{-st} - \int_0^\infty dt bx(t)e^{-st}. \quad (11)$$

Umsortieren führt zu

$$\underbrace{(s + b - ae^{-s\tau})}_{=h(s)} \int_0^\infty dt x(t)e^{-st} = g(0) + e^{-s\tau} \int_{-\tau}^0 dt ag(t)e^{-st}. \quad (12)$$

Durch die Rücktransformation sind wir in der Lage, einen Ausdruck für  $x(t)$  zu schreiben

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds e^{st} \frac{g(0) + e^{-s\tau} \int_{-\tau}^0 dt ag(t)e^{-st}}{h(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds u(s), \quad (13)$$

wobei zur Abkürzung  $u(s)$  eingeführt wird. Dieser Ausdruck ist ein Konturintegral. Wenn man den Integrationsweg rechts von allen Singularitäten des Integranden wählt und die Kontur schließt, lässt sich der Ausdruck mit dem Residuensatz in eine Summe umformen

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \text{Res}_{s=s_r} (u(s)). \quad (14)$$

Die  $s_r$  sind die unendlich vielen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (5). Wir interessieren uns besonders für den marginal stabilen Fall  $a = b = 1$ . Wie wir in Abschnitt 2 sehen konnten, ist in diesem Fall  $s_r = 0$  der führende Eigenwert. Dieser Wert ist entscheidend für das Langzeitverhalten von  $x(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{g(0) + \int_{-\tau}^0 dt g(t)}{1 + \tau} \quad (15)$$

Für große Zeiten stellt sich ein fester Wert ein, der von  $g(t)$  abhängt.

Wenn bereits die konstante Lösung  $x(t) = x_0$  vorliegt und eine zeitlich begrenzte Störung einsetzt, so strebt  $x(t)$  gegen einen neuen konstanten Wert  $x_\infty$ . Diese Verschiebung kann man ausrechnen und sie hat eine ähnliche Form wie (15). Wir betrachten

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau) - x(t) + F(t), \quad x(t) = x_0 \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (16)$$

Die Störung hat die Form

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & : \quad \forall t \text{ mit } a \leq t \leq b \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}. \quad (17)$$

Integriert man beide Seiten über  $t$  von 0 bis  $T$ , so erhält man mittels Substitution  $s = T - \tau$

$$x(T) - x_0 = \int_{-\tau}^{T-\tau} x(s) ds - \int_0^T x(t) dt + \int_0^T F(t) dt. \quad (18)$$

Die Zeit  $T$  sei hinreichend groß, so dass sich bereits der neue Wert  $x(T) = x_\infty$  eingestellt hat. Es ergibt sich

$$x_\infty - x_0 = x_0\tau - x_\infty\tau + \int_a^b f(t) dt, \quad (19)$$

und schließlich

$$x_\infty = x_0 + \frac{\int_a^b f(t) dt}{1 + \tau}. \quad (20)$$

## 4 Störung durch ein multiplikatives Rauschen

Im Folgenden wird ein multiplikatives Gaußsches weißes Rauschen  $\xi(t)$  mit  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  hinzugefügt.  $\langle \dots \rangle$  bezeichnet den Mittelwert über alle Realisierungen des treibenden

Prozesses. Der Koeffizient von  $x(t)$  beträgt nur noch im Mittel  $b$ . Nun lautet die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - (b + \xi_t)x(t), \quad x(t) = x_0 \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (21)$$

Das Gaußsche weiße Rauschen ist der Grenzfall eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, für den Varianz und inverse Korrelationszeit nach unendlich gehen, während ihr Quotient konstant bleibt

$$\sigma^2 \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma^2}{\gamma} = D. \quad (22)$$

Die Autokorrelation des Rauschens beträgt  $\langle \xi_t \xi_{t'} \rangle = 2D\delta(t - t')$ . Allgemein (siehe [Sus78]) kann man zeigen, dass für ein weißes Rauschen die Lösung  $x(t)$  von (21) mit der Lösung folgender Stratonovich-Differentialgleichung übereinstimmt

$$dx(t) = ax(t - \tau)dt - bx(t)dt - \sqrt{2D}x \circ dW_t. \quad (23)$$

$W_t$  ist der Wiener-Prozess. Eine Frage ist nun, welche Stabilität der Mittelwert  $\langle x(t) \rangle$  hat. Das kann man mit dem Momentenkriterium berechnen.

## 5 Analytische Berechnungen mit dem Momentenkriterium

Wir nehmen eine Mittelung der Differentialgleichung (21) vor:

$$\langle \dot{x}(t) \rangle = a\langle x(t - \tau) \rangle - b\langle x(t) \rangle - \langle \xi_t x(t) \rangle. \quad (24)$$

Außerdem soll eine Kurzschrift eingeführt werden, mit der Gleichung (24) folgendermaßen lautet:

$$\dot{X} = aX_\tau - bX - X^\xi. \quad (25)$$

Den Term  $X^\xi = \langle \xi_t x(t) \rangle$  kann man nun auf drei Wegen behandeln. Mit der Formel von Shapiro-Loginov [SL78] kann man eine Bewegungsgleichung für  $X^\xi$  erhalten. Eine direkte Bestimmung ist mit der Formel von Furutsu-Novikov ([Fur63] und [Nov64]) möglich. Eine dritte Möglichkeit verwendet die statistischen Eigenschaften des Ito-Integrals.

### 5.1 Shapiro-Loginov

Die Formel von Shapiro-Loginov ist eine Bewegungsgleichung für den Term  $\langle \xi_t x(t) \rangle$ . Allgemein lautet sie

$$\frac{d}{dt} \langle \eta_t \phi_t \rangle = -\gamma \langle \eta_t \phi_t \rangle + \langle \eta_t \dot{\phi}_t \rangle. \quad (26)$$

Diese Gleichung gilt für Markov-Prozesse  $\eta$  mit der Autokorrelation  $\langle \eta_t \eta_{t'} \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma(t-t')}$ , insbesondere für Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse.  $\gamma$  ist die inverse Korrelationszeit,  $\phi$  ein nicht vorwegnehmendes Funktional von  $\eta$ . Im Grenzfall des Gaußschen weißen Rauschens ist diese Formel nicht zu vereinfachen, da in diesem Fall  $\gamma \rightarrow \infty$  geht. Deshalb wird zunächst die Rechnung für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess durchgeführt. Der Grenzübergang findet am Schluss statt.

In unserem Fall ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\langle\eta_t x_t\rangle = -\gamma\langle\eta_t x_t\rangle + \langle\eta_t \dot{x}_t\rangle = -\gamma\langle\eta_t x_t\rangle + a\langle\eta_t x(t-\tau)\rangle - b\langle\eta_t x_t\rangle - \underbrace{\langle\eta_t \eta_t x_t\rangle}_{\sigma^2\langle x_t\rangle}. \quad (27)$$

$\sigma^2$  ist die Varianz des Prozesses. Diese können wir herausziehen, da das Theorem von Bourret, Frisch und Pouquet [BFP73] gilt:  $\langle\eta_{t_1}\eta_{t_2}\phi_t[\eta]\rangle = \langle\eta_{t_1}\eta_{t_2}\rangle\langle\phi_t[\eta]\rangle$ . In Kurzschrift lautet die letzte Gleichung:

$$\dot{X}^\eta = -\gamma X^\eta + aX_\tau^\eta - bX^\eta - \sigma^2 X. \quad (28)$$

Der Term  $X^\eta$  ist jetzt zwar bestimmt, jedoch in Abhängigkeit eines neuen unbekanntem Terms  $X_\tau^\eta$ , der auch mit der Formel von Shapiro-Loginov berechnet werden kann. Die Folge ist ein unendlichdimensionales Gleichungssystem, wobei die ersten beiden Gleichungen (25) und (28) sind:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= & +aX_\tau & -bX & -X^\eta, \\ \dot{X}^\eta &= & -\gamma X^\eta & +aX_\tau^\eta & -bX^\eta & -\sigma^2 X, \\ \dot{X}_\tau^\eta &= & -\gamma X_\tau^\eta & +aX_{2\tau}^\eta & -bX_\tau^\eta & -\sigma^2 e^{-\gamma\tau} X_\tau, \\ &\vdots & & & & \\ \dot{X}_{N\tau}^\eta &= & -\gamma X_{N\tau}^\eta & +aX_{(N+1)\tau}^\eta & -bX_{N\tau}^\eta & -\sigma^2 e^{-\gamma N\tau} X_{N\tau}, \\ &\vdots & & & & \end{aligned} \quad (29)$$

Äquivalent ist dazu der Limes  $N \rightarrow \infty$  des endlichen Systems

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n \mathbf{X}(t-n\tau), \quad (30)$$

$$\text{mit } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^\eta \\ X_\tau^\eta \\ \vdots \\ X_{N\tau}^\eta \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma^2 & -(\gamma+b) & a & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(\gamma+b) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ -\sigma^2 e^{-\gamma\tau} & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ -\sigma^2 e^{-2\gamma\tau} & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \dots \quad (32)$$

Wir führen eine lineare Stabilitätsanalyse um einen Fixpunkt  $\mathbf{X}_0$  durch und setzen in Gleichung (30)  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \varepsilon(t)$  mit  $\varepsilon(t) = \mathbf{c}e^{st}$  ein. Wir erhalten

$$s\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \left( \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n e^{-sn\tau} \right) \mathbf{X} = \mathbf{F}'\mathbf{X}. \quad (33)$$

Da das System (29) linear ist, hängt  $F'$  nicht vom Fixpunkt  $\mathbf{X}_0$  ab.

Es lässt sich folgendes ablesen

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} ae^{-s\tau} - b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^2 & -(\gamma + b) & a & & \vdots \\ \sigma^2 e^{-(\gamma+s)\tau} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ \sigma^2 e^{-(\gamma+s)N\tau} & 0 & \dots & 0 & -(\gamma + b) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Um die Determinante der Matrix  $\mathbf{F}' - s\mathbf{I}$  zu berechnen, entwickeln wir nach der ersten Spalte und erhalten einen Ausdruck für das Quasipolynom  $h_N(s)$ .

$$\begin{aligned} h_N(s) &= \det(\mathbf{F}' - s\mathbf{I}) \\ &= (s + b - ae^{-s\tau})(s + \gamma + b)^{N+1}(-1)^N - \sigma^2 \sum_{n=0}^N a^n e^{-(\gamma+s)n\tau} (s + \gamma + b)^{N-n} (-1)^N \\ &= (s + \gamma + b)^N (-1)^N \left[ (s + b - ae^{-s\tau})(s + \gamma + b) - \sigma^2 \sum_{n=0}^N \left( \frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b} \right)^n \right] \\ &= (s + \gamma + b)^N (-1)^N \tilde{h}_N(s). \end{aligned} \quad (35)$$

Von der zweiten zur dritten Zeile wird verwendet, dass  $s + \gamma + b \neq 0$  ist.  $s = -(\gamma + b)$  ist keine charakteristische Wurzel, da  $h_N(-(\gamma + b)) = -\sigma^2 a^N e^{bN\tau} (-1)^N \neq 0$  ist für  $a \neq 0$ . Der Fall  $a = 0$  beschreibt die unverzögerte Gleichung und ist nicht von Interesse. Es genügt deswegen  $\tilde{h}_N(s) = 0$  zu betrachten.

Wir untersuchen den Ausdruck  $z \equiv \frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b}$  um herauszufinden, ob wir die Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \quad \forall |z| < 1 \quad (36)$$

anwenden können. Für  $s = \nu + i\omega$  gilt

$$|z|^2 = \left| \frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b} \right|^2 = \frac{a^2 e^{-2(\gamma+\nu)\tau} \overbrace{|e^{-i\omega\tau}|^2}^{=1}}{(\nu + \gamma + b)^2 + \omega^2} \quad (37)$$

und für  $s = 0$  wird  $|z|$  am größten

$$\Rightarrow |z| \leq \left| \frac{ae^{-\gamma\tau}}{\gamma + b} \right|. \quad (38)$$

Falls  $|\gamma + b| \leq |a|$  ist, so existiert ein hinreichend kleines  $\tau$  für das  $|z| \geq 1$  wird. Für  $|\gamma + b| > |a|$  ist also (36) immer anwendbar.

$$|\gamma + b| > |a| \Leftrightarrow \gamma > |a| - b \quad \text{oder} \quad \gamma < -|a| - b. \quad (39)$$

Da wir an einem Ergebnis für große  $\gamma$ , das heißt kleinen Korrelationszeiten, interessiert sind, ist die rechte Bedingung immer erfüllt.

Wir bestimmen  $\tilde{h}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{h}_N(s)$ , indem wir (36) benutzen

$$\tilde{h}(s) = s + b - ae^{-s\tau} - \frac{\sigma^2}{s + b + \gamma - ae^{-(\gamma+s)\tau}}. \quad (40)$$

Nun führen wir den Grenzfall des Gaußschen weißen Rauschens durch

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty, \frac{\sigma^2}{\gamma} = D} \tilde{h}(s) = s + b - ae^{-s\tau} - D = 0. \quad (41)$$

Dieses Verfahren wurde in der Diplomarbeit von Micaela Krieger [Kri97] für den dichotomen Markov-Prozess angewandt, vgl. auch [KEB02]. Da es ein Verfahren mit langen Rechnungen und vielen neu eingeführten Notationen ist, untersuchen wir, ob es einen einfacheren Weg gibt.

## 5.2 Furutsu-Novikov

Die Formel von Furutsu-Novikov lautet im Spezialfall eines Gaußschen weißen Rauschens  $\xi_t$

$$\langle \xi_t \phi_t[\xi] \rangle = \int_{-\infty}^t dt' 2D \delta(t-t') \left\langle \frac{\delta \phi_t[\xi]}{\delta \xi_{t'}} \right\rangle = D \left\langle \frac{\delta \phi_t[\xi]}{\delta \xi_t} \right\rangle, \quad (42)$$

wobei  $\phi_t[\xi]$  ein nicht vorwegnehmendes Funktional von  $\xi$  ist. Um  $\langle \xi_t x(t) \rangle$  auszurechnen benötigen wir also die Funktionalableitung  $\frac{\delta x(t)}{\delta \xi_{t'}}$ . Wir schreiben die Differentialgleichung (21) in eine Integralgleichung um

$$x_t = x_0 + \int_0^t ds [ax(s-\tau) - (\xi_s + b)x(s)]. \quad (43)$$

Somit können wir ablesen:

$$\frac{\delta x_t}{\delta \xi_{t'}} = -x_{t'} - \int_{t'}^t ds [b + \xi_s] \frac{\delta x_s}{\delta \xi_{t'}} + \int_{t'+\tau}^t ds a \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}}, \quad (44)$$

denn für  $s < t'$  ist  $\frac{\delta x_s}{\delta \xi_{t'}} = 0$ , bzw. für  $s < t' + \tau$  ist  $\frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}} = 0$ . Nun können wir den Grenzübergang  $t' \rightarrow t$  ausführen. Das erste Integral verschwindet, weil die Integrationsgrenzen im Limes übereinstimmen. Das zweite sehen wir uns genauer an:

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_{t'+\tau}^t ds \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}} = - \int_t^{t+\tau} ds \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_t}. \quad (45)$$

Nur für die obere Grenze  $s = t + \tau$  gibt die Funktionalableitung einen Beitrag, der aber im Integral kein Gewicht trägt. Für  $s < t + \tau$  ist  $s - \tau < t$  und  $\frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_t} = 0$ . Wir erhalten

$$\frac{\delta x_t}{\delta \xi_t} = -x_t \quad (46)$$

und können hiermit  $\langle \xi_t x(t) \rangle$  berechnen

$$X^\xi \equiv \langle \xi_t x(t) \rangle = -D \langle x_t \rangle \equiv -DX. \quad (47)$$

Gleichung (24) lautet nun

$$\dot{X} = aX_\tau - (b - D)X = F(X, X_\tau). \quad (48)$$

Durch einen Exponentialansatz erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$h(s) = s + b - D - ae^{-s\tau} = 0. \quad (49)$$

Dieses charakteristische Polynom ist das gleiche wie in Formel (41). Aus Gleichung (48) und der Forderung  $F(X_0, X_0) = 0$  können die Fixpunkte abgelesen werden

$$aX_0 - (b - D)X_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \text{const.} & \text{für } a = b + D \\ X_0 = 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (50)$$

Man erkennt, dass dieses Verfahren eleganter ist als das mittels der Bewegungsgleichung von Shapiro-Loginov.

### 5.3 Verwendung der Eigenschaft des Ito-Integrals

Wir betrachten wieder die Stratonovich-Differentialgleichung (23). Wir können diese in eine äquivalente Ito-Differentialgleichung umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} dx_t &= f(x_t, x_{t-\tau})dt + g(x_t) \circ dW_t \\ \Leftrightarrow dx_t &= [f(x_t, x_{t-\tau}) + Dg(x_t)g'(x_t)] dt + g(x_t)dW_t \end{aligned} \quad (51)$$

Das Symbol  $\circ$  kennzeichnet den Stratonovich-Sinn. Wenn wir die untere Ito-Differentialgleichung mitteln, so können wir die Martingaleigenschaft des Ito-Integrals verwenden. Mit  $\langle \int_0^t dW_{t'}g(x_{t'}) \rangle = 0$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\langle x_t \rangle = \langle f(x_t, x_{t-\tau}) + Dg(x_t)g'(x_t) \rangle. \quad (52)$$

Mit dieser Umformulierung von Gleichung (23) und  $\langle x(t) \rangle = X$  bzw.  $x(t - \tau) = X_\tau$  erhalten wir

$$\dot{X} = aX_\tau - (b - D)X \quad (53)$$

Durch den Exponentialansatz  $X = e^{st}$  gelangen wir wieder zu der charakteristischen Gleichung (41). Dieses Verfahren wurde in [MN95] verwendet.

### 5.4 Ergebnis des Momentenkriteriums

Jetzt kann man eine neue Variable  $b' = b - D$  einführen und das gemittelte stochastische System kann analog dem deterministischen behandelt werden, da

$$h(s) = s + b' - ae^{-s\tau} = 0 \quad (54)$$

die gleiche Form wie Gleichung (5) hat. Der Parameterraum  $(a, b)$  von vorher entspricht nun dem Parameterraum  $(a, b')$ . Mit anderen Worten bedeutet das Hinzufügen eines multiplikativen Gaußschen weißen Rauschens eine Verschiebung des Stabilitätsgebietes um  $D$  nach oben.

## 6 Sample-Stability-Kriterium

Es gibt Situationen, in denen das Momentenkriterium nicht aussagekräftig ist. Wenn eine Mittelung über viele Realisierungen des stochastischen Prozesses vorliegt, so liefert

dieses Kriterium brauchbare Ergebnisse. Für eine einzige Realisierung soll das Sample-Stability-Kriterium Auskunft geben. Die Idee dabei ist, festzustellen, ob man im Limes großer Zeiten den Einfluss des Rauschens auf die zeitliche Änderung von  $x(t)$  näher bestimmen kann.

Wir betrachten also die Stratonovich-Differentialgleichung

$$dx_t = rx_t dt + x_t \circ dW_t \quad (55)$$

mit einer Konstanten  $r$ . Die formale Lösung lautet

$$x(t) = x_0 e^{rt + W_t} = x_0 e^{(r + \frac{1}{t} \int_0^t ds \xi_s)t}. \quad (56)$$

Im Limes  $t \rightarrow \infty$  gilt  $\frac{1}{t} \int_0^t ds \xi_s = \langle \xi_s \rangle = 0$  fast sicher, das heißt mit Wahrscheinlichkeit 1, da  $\xi_s$  ein stationärer Prozess ist.

Daraus können wir schließen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} -\infty & \text{für } r < 0 \\ +\infty & \text{für } r > 0 \end{cases} \text{ fast sicher.} \quad (57)$$

Für  $r = 0$  fluktuiert  $x(t)$  zwischen beliebig großen und kleinen Werten. Man folgert, dass die Stabilität von (55) fast sicher durch den nichtstochastischen Term bestimmt ist. Dieses Verhalten zeigt sich auch beim verzögerten System. Die Lösung der Differentialgleichung (23) ist fast sicher stabil, wenn  $\max_n \operatorname{Re}(s_n) < 0$  ist. Die  $s_n$  sind die charakteristischen Wurzeln des Quasipolynoms (5) der deterministischen Gleichung.

Es folgt, dass Stabilität im Mittel und fast sichere Stabilität in diesem Modell nicht übereinstimmen. Es gibt also Paare von Werten  $(a, b)$ , für die die Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung fast sicher stabil ist, deren Mittelwert  $\langle x(t) \rangle$  jedoch divergiert.

## 7 Simulation des Systems

Für die Simulation des Systems betrachten wir noch einmal die Gleichung (21). Die einzelnen Terme werden getrennt betrachtet, um eine geeignete Iterationsvorschrift für die gesamte Gleichung später zusammensetzen.

Die Gleichung  $\dot{x}(t) = -bx(t)$  ist der einfachste Teil,  $x(t)$  lässt sich nach der Euler-Methode numerisch berechnen

$$x_{n+1} = x_n - bx_n h. \quad (58)$$

$h$  ist eine geeignet gewählte Schrittweite.

Als nächstes diskutieren wir den verzögerten Term  $\dot{x}(t) = ax(t - \tau)$ . Eine gute und einfach anzuwendende Methode, diesen Teil auszuwerten ist die stückweise Integration, die auf Bellman [Bel61] zurückgeht. Man unterteilt dabei die Zeit in Vielfache von  $\tau$ . Das Zeitintervall  $[0, \tau]$  sei durch die Anfangsfunktion bestimmt. Für das Intervall  $[\tau, 2\tau]$  löst man die Differentialgleichung folgendermaßen:

$$x(t) - x(\tau) = \int_{x(\tau)}^{x(t)} dx = \int_{\tau}^t dt' \dot{x}(t') = a \int_{\tau}^t dt' x(t' - \tau). \quad (59)$$

Für  $x(t - \tau)$  kann man nun die Anfangsfunktion einsetzen und eine Stammfunktion ausrechnen.  $x(t)$  ist damit für das betreffende Intervall berechnet. Für die folgenden Intervalle  $[n\tau, (n+1)\tau]$  geht man analog vor.

Da in unserem Fall ein stochastisches System vorliegt, können wir für den verzögerten Term keinen analytischen Ausdruck einsetzen. Wir müssen wieder schrittweise vorgehen und einzelne vorher ausgerechnete Werte  $x(t - \tau)$  einsetzen. Mit (59) erhält man

$$x(t + h) = x(\tau) + \int_{\tau}^{t+h} dt' ax(t' - \tau) = x(t) + \int_t^{t+h} dt' ax(t' - \tau). \quad (60)$$

Wir approximieren diesen Ausdruck durch

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h. \quad (61)$$

Nun wird der stochastische Term  $\dot{x}(t) = -\xi_t x(t)$  diskutiert. Die beiden äquivalenten Integralgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \text{Stratonovich: } x(t) &= -\sqrt{2D} \int_0^{W_t} x(t') \circ dW_{t'}, \\ \text{Ito: } x(t) &= D \int_0^t x(t') dt' - \sqrt{2D} \int_0^{W_t} x(t') dW_{t'}. \end{aligned} \quad (62)$$

Wir verwenden das stochastische Euler-Verfahren, in dem der zusätzliche stochastische Driftterm aus der Ito-Formulierung berücksichtigt werden muss.

Da  $\langle (W_{t+h} - W_t)^2 \rangle = h$  gilt, wird folgende numerische Integration gewählt:

$$x_{n+1} = x_n + Dx_n h - \sqrt{2D} x_n Z \sqrt{h}. \quad (63)$$

Hierbei ist  $Z$  eine Gaußsche Zufallszahl mit Varianz 1 und Mittelwert 0. Jetzt können wir die gesamte Iterationsvorschrift für Gleichung (21) zusammensetzen:

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h - bx_n h + Dx_n h - \sqrt{2D} x_n Z \sqrt{h}. \quad (64)$$

Für alle Simulationen wird eine Schrittweite  $h = 10^{-3}$  und eine Verzögerung  $\tau = 2$  gewählt. Die Anfangsfunktion lautet  $x(t) = 1, \forall t \in [-\tau, 0]$ . Für das stochastische System wird der Parameter  $D$  auf 1 gesetzt.

Zunächst betrachten wir ein paar ausgewählte Trajektorien des deterministischen Systems für bestimmte Koeffizienten  $(a, b)$ , siehe Abbildungen 3 und 4.

Um ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum darzustellen, muss ein Kriterium entwickelt werden, wann eine berechnete Trajektorie zum Parameterpaar  $(a, b)$  als stabil oder instabil zu interpretieren ist. Wir wählen eine geeignete Simulationsdauer  $T$  und eine Schwelle  $x_{th}$ . Zwar wurde in den Abschnitten 5 und 6 ein Stabilitätskriterium unabhängig von der Anfangsfunktion hergeleitet, wir müssen jedoch bei der Wahl von  $x_{th}$  die Anfangsfunktion berücksichtigen, da wir über eine endliche Zeit simulieren. Wenn in der Zeit  $T$  die Werte  $x_{th}$  oder  $-x_{th}$  überschritten werden, wird die Simulation abgebrochen und die Trajektorie als instabil interpretiert, siehe Abbildung 5.

Im deterministischen System kann man einen festen von  $a$  und  $b$  unabhängigen Wert für  $x_{th}$  wählen. Man erhält ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum, welches das analytisch bestimmte reproduziert, siehe Abbildung 6.

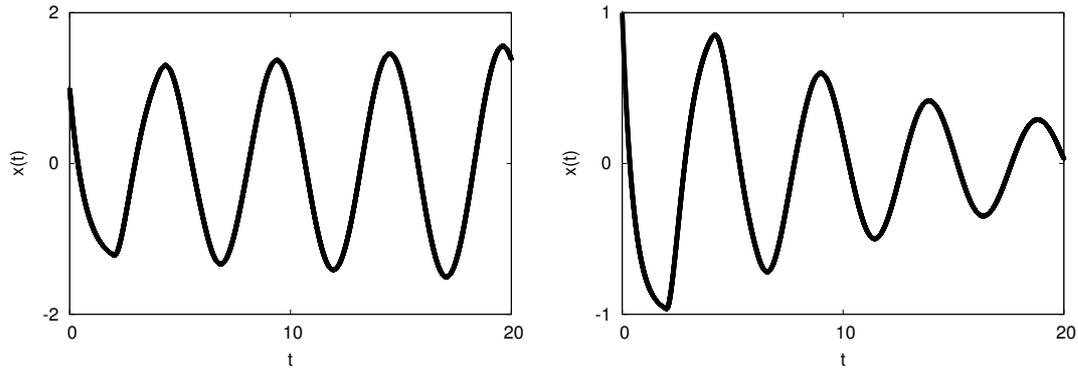


Abbildung 3: An diesen Beispielen kann man einen Übergang von instabilen zu stabilen oszillatorischen Lösungen des deterministischen Systems (4) beobachten. Links ist  $(a = -2; b = 1.5)$ ; rechts ist  $(a = -2; b = 2)$ .

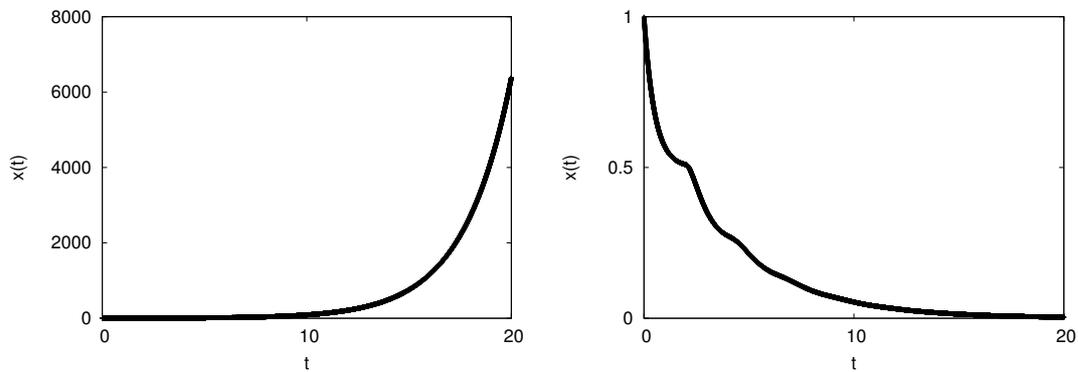


Abbildung 4: Hier kann man einen weiteren Übergang von instabilen zu stabilen Lösungen des deterministischen Systems (4) beobachten. Links ist  $(a = 1; b = 0)$ ; rechts ist  $(a = 1; b = 2)$ .

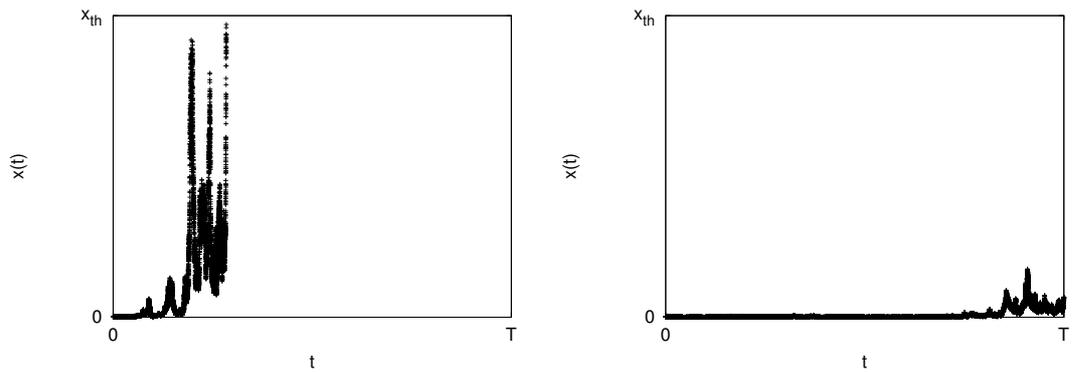


Abbildung 5: In diesen beiden Simulationen der Gleichung (21) mit  $D = 1$  wurden  $T = 50$  und  $x_{th} = 1000$  gewählt. Im linken Bild  $(a = 2, b = 1.9)$  wird die Trajektorie als instabil interpretiert, da  $x_{th}$  überschritten wird. Die rechte Trajektorie  $(a = 2, b = 2.1)$  wird als stabil interpretiert. In diesen beiden Fällen stimmen Interpretation und analytische Berechnung aus Abschnitt 6 überein. Diese Fallunterscheidung muss für jedes Wertepaar  $(a, b)$  getroffen werden, damit ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum für die Gleichungen (4) und (21) numerisch dargestellt werden kann.

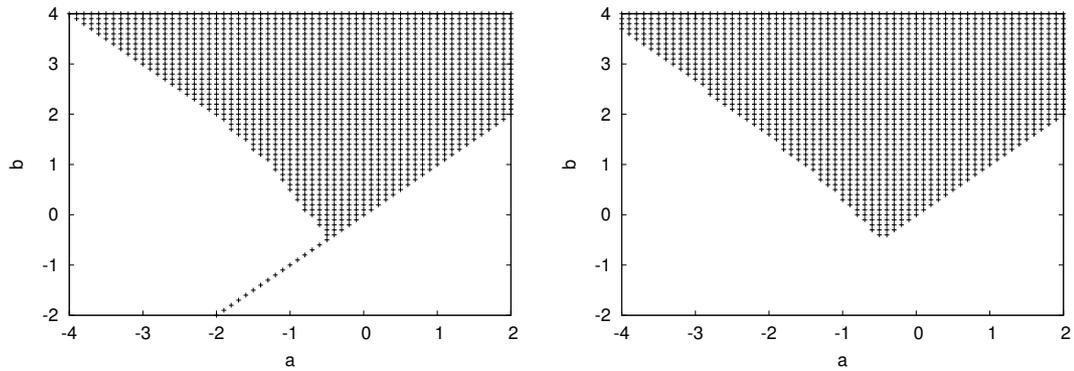


Abbildung 6: Für jedes Paar  $(a, b)$  des deterministischen Systems (4) wird eine Simulation durchgeführt. Es werden  $T = 200$  und  $x_{th} = 10$  gewählt. Links wird die Anfangsfunktion  $g(t) = 1$  gesetzt. Im marginal stabilen Fall  $a = b$  nimmt  $x(t)$  die konstante Lösung  $x(t) = 1$  an, der Punkt wird als stabil interpretiert. Für jede nicht konstante Anfangsfunktion wird das analytische Ergebnis, vgl. Abbildung 2, reproduziert. Rechts wurde  $g(t) = t \forall t \in [-\tau, 0]$  gewählt.

Wenn wir die berechneten Trajektorien des stochastischen Systems analysieren, erkennen wir, dass die Varianz des Prozesses  $x(t)$  von  $a$  und  $b$  abhängig sein muss. An der Ausgangsgleichung (21) sieht man, dass für kleine Werte von  $(a, b)$  der Einfluss des stochastischen Terms groß sein muss und damit auch die Varianz. Er muss klein sein für große Werte von  $(a, b)$ .

Aufgrund einer großen Streuung im Grenzbereich zwischen stabilen und instabilen Prozessen, siehe Abbildung 7, ist es schwer, das analytisch bestimmte Stabilitätsgebiet zu reproduzieren. Wir müssen zunächst umfassend das 2. Moment diskutieren. Es ist sinnvoll,  $x_{th}^2 > \langle x^2 \rangle$  zu wählen.

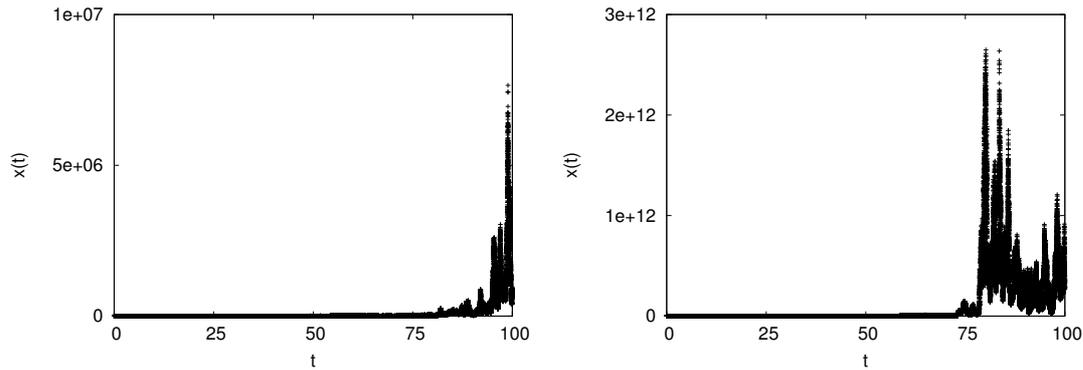


Abbildung 7: Dies sind zwei beobachtete Realisierungen der stochastischen Bewegungsgleichung (21) für die Parameter  $a = b = 1$  und  $D = 1$ . Man erkennt, dass bei verschiedenen Durchläufen der Simulation verschiedene Grenzen überschritten werden, die weit auseinanderliegen. Im Bereich der marginalen Stabilität nimmt die Varianz  $\langle x^2 \rangle$  große Werte an. Das Finden eines geeigneten Wertes für  $x_{th}$  wird erschwert.

## 8 Ausblick

Nach dem Berechnen des 1. Momentes stellen wir uns nun die Frage nach dem Verhalten des 2. Momentes. Wir haben beim Versuch einer Simulation des Stabilitätsgebietes erkannt, dass die Streuung des Prozesses  $x(t)$  ebenso wie sein Mittelwert von  $a$  und  $b$  abhängig sein muss. Diese Abhängigkeit erschwert ein Reproduzieren des analytischen Ergebnisses. Erst wenn wir das 2. Moment kennen, können wir die in Abschnitt 7 eingeführten Größen  $T$  und  $x_{th}$  sinnvoll abschätzen.

Inspiziert von verschiedenen Veröffentlichungen, siehe [GLL99] und [YW05], wollen wir weiterhin untersuchen, ob man im Grenzfall kleiner und großer Verzögerungen noch mehr statistische Eigenschaften der stochastischen Differentialgleichung abschätzen kann.

Außerdem ist die marginale Stabilität von besonderer Wichtigkeit. Es stellt sich die Frage, ob auch in komplizierteren Systemen das gleiche wie in Abschnitt 3 zu beobachten ist: Durch eine äußere Störung stellt sich eine neue konstante Lösung  $x_\infty$  ein, die gegenüber der alten Lösung  $x_0$  um einen bestimmten Wert verschoben ist.

Wenn räumlich ausgedehnte Systeme unter Einfluss von äußeren Störungen von selbst in einen kritischen Zustand übergehen, der anschließend beibehalten wird, so heißen sie selbstorganisiert kritisch. Es können sogenannte Lawinen auftreten, deren Verteilung einem Potenzgesetz folgt. Dieses kann man aus der Ermittlung der First-return-time bestimmen und ist zu analysieren.

## Literatur

- [BC63] R. Bellman und L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [Bel61] R. Bellman, *On the computational solution of differential-difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **2**, 108–110 (1961).
- [BFP73] R. Bourret, U. Frisch, und A. Pouquet, *Brownian motion of harmonic oscillator with stochastic frequency*, Physica A **65**, 303–320 (1973).
- [BLM<sup>+</sup>93a] U. Behn, K. Lippert, C. Möller, J.L. van Hemmen, und B. Sulzer, *Memory in the immune system: Network theory including memory B cells and delay*, Phase Transitions: Physics, Mathematics, Biology,..., Proc. Prague June 1-5 1992, Ed. R. Kotecky, World Scientific, Singapore, 27–34 (1993).
- [BLM<sup>+</sup>93b] U. Behn, K. Lippert, C. Möller, J.L. van Hemmen, und B. Sulzer, *Memory in the immune system: Synergy of different strategies*, Proc. European Conference on Artificial Life (ECAL), Brussels, 63–73 (1993).
- [Fur63] K. Furutsu, J. Res. NBS D **667**, 303 (1963).
- [GLL99] S. Guillouzie, I. L’Heureux, und A. Longtin, *Small delay approximation of stochastic delay differential equations*, Physical Review E **59**, 3970–3982 (1999).
- [KEB02] M. Krieger, J. Emmerich, und U. Behn, unveröffentlichtes Manuskript, November 2002.
- [Kri97] M. Krieger, *Stochastische Differentialgleichungen mit zeitlicher Verzögerung bei marginaler Stabilität*, Diplomarbeit, Universität Leipzig, 1997.
- [Lip95] K. Lippert, *Gedächtnis im Immunsystem - Architektur und Dynamik des Idiotypischen Netzwerks*, Dissertation, Universität Leipzig, 1995.
- [Mac89] N. MacDonald, *Biological delay systems: linear stability theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [MN95] M. Mackey und I. Nechaeva, *Solution moment stability in stochastic differential delay equations*, Physical Review E **52**, 3366–3376 (1995).
- [Nov64] E.A. Novikov, JETP **47**, 1919 (1964), (russisch).
- [SL78] V.E. Shapiro und V.M. Loginov, *Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations*, Physica A **91**, 563–574 (1978).
- [Sus78] H.J. Sussmann, *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations*, The Annals of Probability **60**, 19–41 (1978).
- [YW05] S. Yanchuk und M. Wolfrum, *Instabilities of equilibria of delay-differential equations with large delay*, ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands (7-12 August 2005).