
Diplomarbeit

**Statistische Eigenschaften marginal
stabiler stochastischer Systeme mit
zeitlicher Verzögerung**

vorgelegt von:

Christian Brettschneider

Betreuer:

Prof. Dr. Ulrich Behn

Leipzig, 16. Oktober 2006

Universität Leipzig
Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Institut für Theoretische Physik

Gutachter:
Prof. Dr. Ulrich Behn
Prof. Dr. Klaus Kroy

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die deterministische Differentialgleichung mit Verzögerung	3
2.1	Stabilität von Fixpunkten der deterministischen Gleichung	3
2.2	Verhalten im marginal stabilen Fall	8
2.3	Verhalten im allgemeinen Fall	11
2.4	Verhalten im Falle kleiner Verzögerungen	12
3	Stabilität der stochastischen Gleichung bei additivem Rauschen	17
3.1	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der verzögerten Gleichung bei additivem Rauschen	18
3.2	Stabilität des ersten Momentes bei additivem Rauschen	20
3.3	Stabilität des zweiten Momentes bei additivem Rauschen	21
3.3.1	Integraldarstellung der Kovarianz	22
3.3.2	Analytische Lösung der Kovarianz	26
4	Stabilität der stochastischen Gleichung bei multiplikativem Rauschen	29
4.1	Sample-Stability-Kriterium des unverzögerten Systems	30
4.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Limes kleiner Verzögerungen	31
4.3	Stabilität des ersten Momentes bei multiplikativem Rauschen	31
4.3.1	Shapiro-Loginov	32
4.3.2	Furutsu-Novikov	35
4.3.3	Verwendung der Eigenschaft des Ito-Integrals	36
4.3.4	Ergebnis des Momentenkriteriums	36
4.4	Stabilität des zweiten Momentes bei multiplikativem Rauschen	37
4.4.1	Aufstellen der Fokker-Planck-Gleichung und Bestimmung der kritischen Verzögerung	37
4.4.2	Formulierung einer charakteristischen Gleichung	41
5	Simulation von Differentialgleichungen mit Verzögerung	45
5.1	Simulation der deterministischen Differentialgleichung mit Verzögerung	46
5.2	Simulation der Differentialgleichung mit Verzögerung und additivem Rauschen	48
5.3	Simulation der Differentialgleichung mit Verzögerung und multiplikativem Rauschen	51
5.3.1	Simulationen im Falle kleiner Verzögerungen	51
5.3.2	Simulationen zum Sample-Stability-Kriterium	53
5.3.3	Simulationen zum Momentenkriterium	60

6 Die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit von Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung mit Verzögerung	63
6.1 Numerische Bestimmung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit . . .	64
6.2 Analytische Bestimmung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit . . .	66
7 Zusammenfassung und Ausblick	73

Kapitel 1

Einleitung

Die Theorie dynamischer Systeme wird verwendet, um natürliche Prozesse zu beschreiben. Zum Beispiel kann damit die zeitliche Entwicklung einer Population oder eines physikalischen Feldes bestimmt werden. In der Natur treten jedoch Phänomene auf, in denen eine zeitliche Entwicklung nicht nur vom aktuellen Zustand, sondern auch von seiner Vergangenheit abhängt. Eine solche Verzögerung in der Entwicklung kann zeit- und zustandsabhängig sein.

Es gibt einige naheliegende Beispiele, bei denen die Entwicklung von der Vergangenheit abhängt. Das Wachstum einer Population, die eine charakteristische Zeit τ benötigt, um sich zu reproduzieren, kann etwa durch eine verzögerte logistische Gleichung beschrieben werden. Ein verzögerter Term wird auch in mehrdimensionalen Systemen eingeführt. Das verzögerte Lotka-Volterra-System beschreibt etwa die Dynamik von Räuber- und Beutepopulationen. Dieses wird in [WC57] vorgestellt.

Ein physikalisch motiviertes Beispiel für die Einbeziehung eines verzögerten Terms betrifft die Beschreibung optischer Instrumente. Lang und Kobayashi stellen in [LK80] ein Modell vor, welches die Dynamik von elektromagnetischen Feldern in Lasern beschreibt.

In einigen Fällen kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen, da die Verzögerung klein ist gegenüber einer charakteristischen Zeit des Modells. In dieser Diplomarbeit soll jedoch die Entwicklung des Zustandes zur Zeit t auch abhängig vom Zustand zur Zeit $t - \tau$ sein. τ ist eine Konstante, die eine beliebige Größe annehmen kann.

Ist das Modell kontinuierlich in der Zeit, so wird eine Differentialgleichung mit zeitlicher Verzögerung aufgestellt. Gleichungen von diesem Typ werden auch Differenzdifferentialgleichungen (DDGL) genannt.

Zunächst werden typische Effekte der Einbeziehung eines Terms $x(t - \tau)$ vorgestellt, die Unterschiede zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen veranschaulichen sollen. Zum Beispiel sind bereits bei einer linearen DDGL 1. Ordnung Oszillationen möglich. Das Ziel unserer Überlegungen ist jedoch die Bestimmung der Stabilität von Fixpunkten der Differentialgleichung mit Verzögerung. Die Grenze der Stabilität soll in Abhängigkeit von den Koeffizienten ermittelt werden.

Im dritten und vierten Kapitel sollen Stabilitätskriterien der stochastischen Gleichung, angetrieben durch ein additives bzw. multiplikatives weißes Rauschen, betrachtet werden. Dieser Teil bietet eine Ergänzung zu der Arbeit von Micaela Krieger [Kri97], die in ihrer Diplomarbeit eine Differentialgleichung mit zeitlicher Verzögerung durch ein buntes multiplikatives Rauschen, den dichotomen Markovprozess, gestört hat.

Im fünften Kapitel werden einige Ergebnisse numerisch überprüft. Die numerischen

Analysen können einige Aussagen aus den vorherigen Kapiteln bestätigen, sie geben jedoch auch Anlass zu neuen Fragestellungen.

Im sechsten Kapitel wird ein Weg vorgestellt, wie die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit von Lösungen der Differentialgleichung mit Verzögerung bestimmt werden kann. Außerdem wird überprüft, ob diese Verteilung von den Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte abhängt.

Kapitel 2

Die deterministische Differentialgleichung mit Verzögerung

2.1 Stabilität von Fixpunkten der deterministischen Gleichung

Wir betrachten ein System von DDGL

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(t) \forall t \in [-\tau, 0]$. Für einen Fixpunkt \mathbf{x}_0 dieser Gleichung gilt $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$. Um das Verhalten kleiner Abweichungen vom Fixpunkt zu studieren, setzen wir $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{c}e^{st}$ ein. In linearer Näherung gilt in der Nähe des Fixpunktes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 e^{-s\tau})\boldsymbol{\varepsilon}(t). \quad (2.2)$$

Die Bestimmung der Lösungen der charakteristischen Gleichung reduziert sich auf die Bestimmung der Eigenwerte der Jacobimatrix \mathbf{F}' . Es folgt

$$\begin{aligned} h(s) &= \det(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 e^{-s\tau}) - s\mathbf{I}) \\ &= H_n(s) + H_{n-1}(s)e^{-s\tau} + H_{n-2}(s)e^{-2s\tau} + \dots + H_0(s)e^{-ns\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die $H_i(s)$ sind Polynome i -ter Stufe, die Funktion $h(s)$ ist ein Quasipolynom. Nach [BC63] wird das asymptotische Verhalten der Abweichungen, bestimmt durch das Gleichungssystem (2.2), für $t \rightarrow \infty$ durch die charakteristische Wurzel mit maximalem Realteil bestimmt. Wir definieren

$$\alpha_0 := \max_n \{ \operatorname{Re}(s_n) \mid h(s_n) = 0 \}. \quad (2.4)$$

Definition Der Fixpunkt \mathbf{x}_0 des Gleichungssystems (2.1) ist

$$\begin{aligned} &\text{stabil, wenn} && \alpha_0 < 0, \\ &\text{marginal stabil, wenn} && \alpha_0 = 0, \\ &\text{instabil, wenn} && \alpha_0 > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Zunächst wird ein grundlegendes Beispiel einer linearen eindimensionalen DDGL betrachtet

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t), \quad x(t) = g(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (2.6)$$

Unter der Bedingung $a = b$ ist $x(t) = x_0 = \text{const}$ ein Fixpunkt der DDGL. Für $a \neq b$ ist $x_0 = 0$ der Fixpunkt.

Um die Stabilitätseigenschaften eines Fixpunktes zu bestimmen, benötigen wir die charakteristische Gleichung. Der Exponentialansatz $x(t) = x_0 + \varepsilon(t) = x_0 + ce^{st}$ führt uns zu

$$(b - a)x_0 + sce^{st} - ace^{s(t-\tau)} + bce^{st} = 0. \quad (2.7)$$

Der erste Term verschwindet, da entweder $a = b$ oder $x_0 = 0$ gilt. Wir teilen durch ce^{st} und erhalten

$$h(s) \equiv s + b - ae^{-s\tau} = 0. \quad (2.8)$$

Die Nullstellen dieser Gleichung werden charakteristische Wurzeln genannt. Ihre Lage ist nur in wenigen Fällen explizit auszurechnen. Für zwei ausgewählte Wertepaare (a, b) wollen wir sie numerisch bestimmen, siehe Abbildung 2.1.

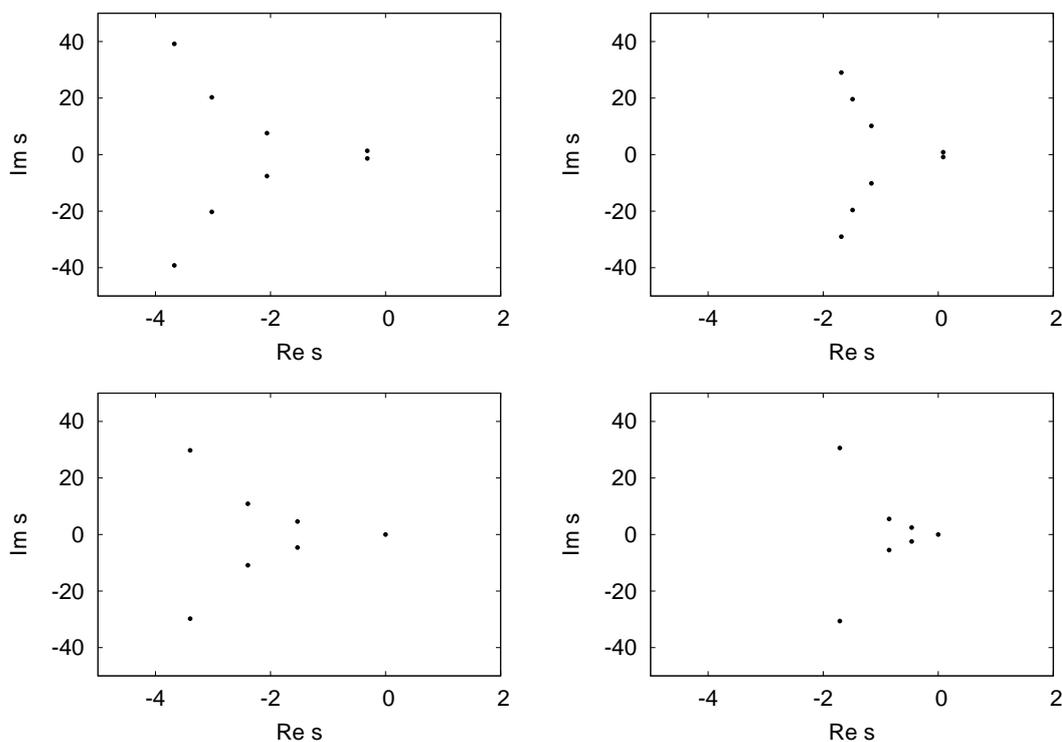


Abbildung 2.1: Die oberen Diagramme zeigen numerisch bestimmte Wurzeln in der komplexen Ebene für $a = -1, b = 0$. Links ist $\tau = 1$, rechts ist $\tau = 2$. Offenbar findet mit wachsendem τ ein Stabilitätswechsel statt, da die imaginäre Achse überschritten wird. Unten werden die charakteristischen Wurzeln für $a = b = 1$ und $\tau = 1$ (links) bzw. $\tau = 2$ (rechts) dargestellt. Die Wurzel mit dem größten Realteil ($s = 0$) ändert ihre Position nicht.

Aus der Abbildung 2.1 vermuten wir zwei Eigenschaften für $h(s)$:

- 1) Für die Wurzel mit größtem Realteil gilt $Re(s) < \infty$.
Eine untere Schranke für den Realteil gibt es dagegen nicht.
- 2) Mit wachsendem τ bewegen sich die Wurzeln nach rechts, mit Ausnahme von $s = 0$.

Eigenschaft 1) wird in Hale [Hal77] bewiesen. Eigenschaft 2) bedeutet, dass mit wachsendem τ nur eine Destabilisierung der Fixpunkte eintreten kann. Die folgende Rechnung zeigt die Veränderung des Realteils mit τ am Rande der Stabilität $s = i\omega$. Das Umstellen der Gleichung $h(i\omega) = 0$ ergibt

$$\frac{i\omega + b}{a} = e^{-i\omega\tau}. \quad (2.9)$$

Wir leiten die charakteristische Gleichung (2.8) nach τ ab

$$\frac{dh(s)}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} + a \left(s + \tau \frac{ds}{d\tau} \right) e^{-s\tau} = 0. \quad (2.10)$$

Die Ableitung von s nach τ an der Stelle $s = i\omega$ ist damit

$$\left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=i\omega} = \frac{-ai\omega e^{-i\omega\tau}}{1 + a\tau \underbrace{e^{-i\omega\tau}}_{= \frac{i\omega+b}{a}}} = \frac{-i\omega(i\omega + b)}{1 + \tau(i\omega + b)}. \quad (2.11)$$

Wir erweitern den Bruch, um einen reellen Nenner zu erhalten und nehmen den Realteil

$$Re \left\{ \left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=i\omega} \right\} = \frac{\omega^2}{(1 + b\tau)^2 + (\tau\omega)^2} \geq 0. \quad (2.12)$$

Der Realteil der charakteristischen Wurzel wird größer für $s = i\omega$, $\omega \neq 0$. Bei $\omega = 0$, also $s = 0$ bleibt der Realteil gleich. Wenn die führende Wurzel komplex ist, muss es also einen kritischen Wert τ_c geben, an dem ein Stabilitätswechsel stattfindet.

Die Gleichung (2.9) kann man auch geometrisch deuten. Die linke Seite stellt eine Gerade in der komplexen Ebene dar. Die rechte Seite ist der Einheitskreis, vgl. Abbildung 2.2. Aus ihren Schnittpunkten kann man die kritischen Werte τ_c und ω_c

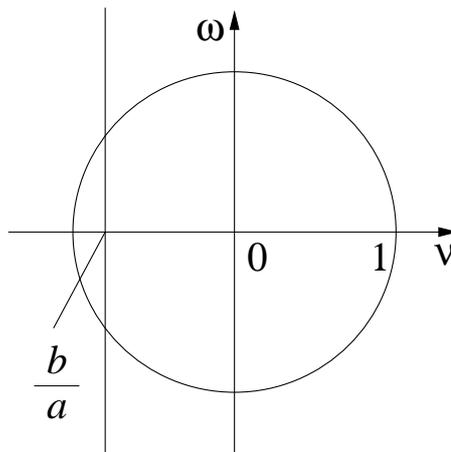


Abbildung 2.2: Geometrische Veranschaulichung der Lösungen von $\frac{i\omega+b}{a} = e^{-i\omega\tau}$.

bestimmen. ω_c erhält man, indem man den Betrag der linken Seite gleich eins setzt. τ_c lässt sich bestimmen, indem die Phase von $\frac{i\omega+b}{a}$ berechnet wird

$$\omega_c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \tau_c = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos\left(\frac{b}{a}\right). \quad (2.13)$$

Diese geometrische Interpretation wird in [Mac89] beschrieben. Man kann sich auf den Fall $\omega \geq 0$ beschränken. Aus Abbildung 2.2 und Gleichung (2.13) kann man erkennen, dass $\omega_c = 0$ unter der Bedingung $a = b$ gilt. In diesem Fall ist also unabhängig von der Verzögerung die Wurzel $s = 0$ ein Eigenwert der Gleichung (2.8).

Wir möchten herausfinden, ob $s = 0$ die führende charakteristische Wurzel ist. Wir betrachten mögliche reelle Wurzeln und stellen (2.8) um

$$\underbrace{s + b}_{f_1(s)} = \underbrace{ae^{-s\tau}}_{f_2(s)}. \quad (2.14)$$

Für $a = b$ gibt es immer zwei reelle Wurzeln, wie wir in Abbildung 2.3 erkennen können.

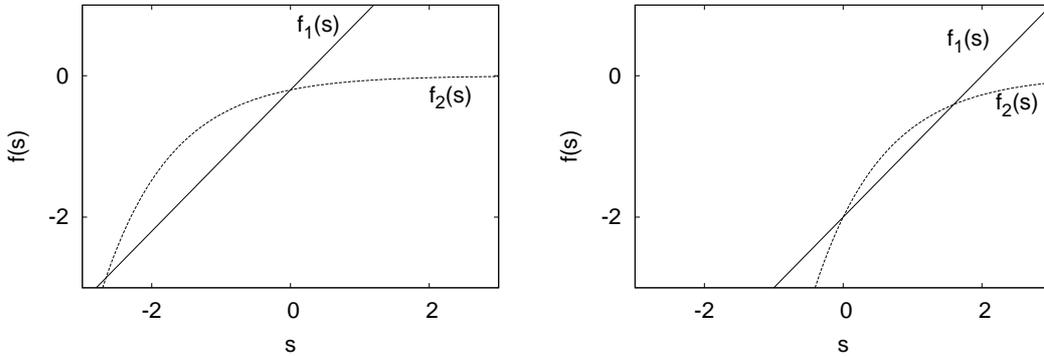


Abbildung 2.3: Die Lage der reellen Wurzeln von (2.8) können wir durch die Schnittpunkte von $f_1(s) = s + b$ und $f_2(s) = ae^{-s\tau}$ bestimmen. Links wird $a = b = -0.2$ dargestellt, $s = 0$ ist führende Wurzel. Rechts wird $a = b = -2$ dargestellt, es existiert eine führende Wurzel $s > 0$.

Offenbar findet ein Übergang statt, wenn $\left.\frac{df_2(s)}{ds}\right|_{s=0} = 1$ gilt

$$\left.\frac{df_2(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\tau ae^{-s\tau}\Big|_{s=0} = -\tau a \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{\tau}. \quad (2.15)$$

Daraus folgern wir, dass die Fixpunkte $x_0 = 0$ und $x_0 = const$ der Gleichung (2.6) bei $a = b > -\frac{1}{\tau}$ marginal stabil sind, für $a = b < -\frac{1}{\tau}$ sind sie instabil. Wenn f_1 und f_2 keine Schnittpunkte haben, gibt es keine reellen Lösungen. Das ist zum Beispiel für unterschiedliche Vorzeichen von a und b der Fall.

Aus Gleichung (2.14) kann man auch erkennen, dass sich f_1 und f_2 für ein positives a immer schneiden, es gibt also immer eine reelle Lösung von (2.8). Für negative Werte von a gibt es Bereiche im Parameterraum (a, b) , in denen nur komplexe Wurzeln existieren. Für $a = -2$ und verschiedene Werte von b sollen die Wurzeln in der komplexen Ebene dargestellt werden, siehe Abbildung 2.4.

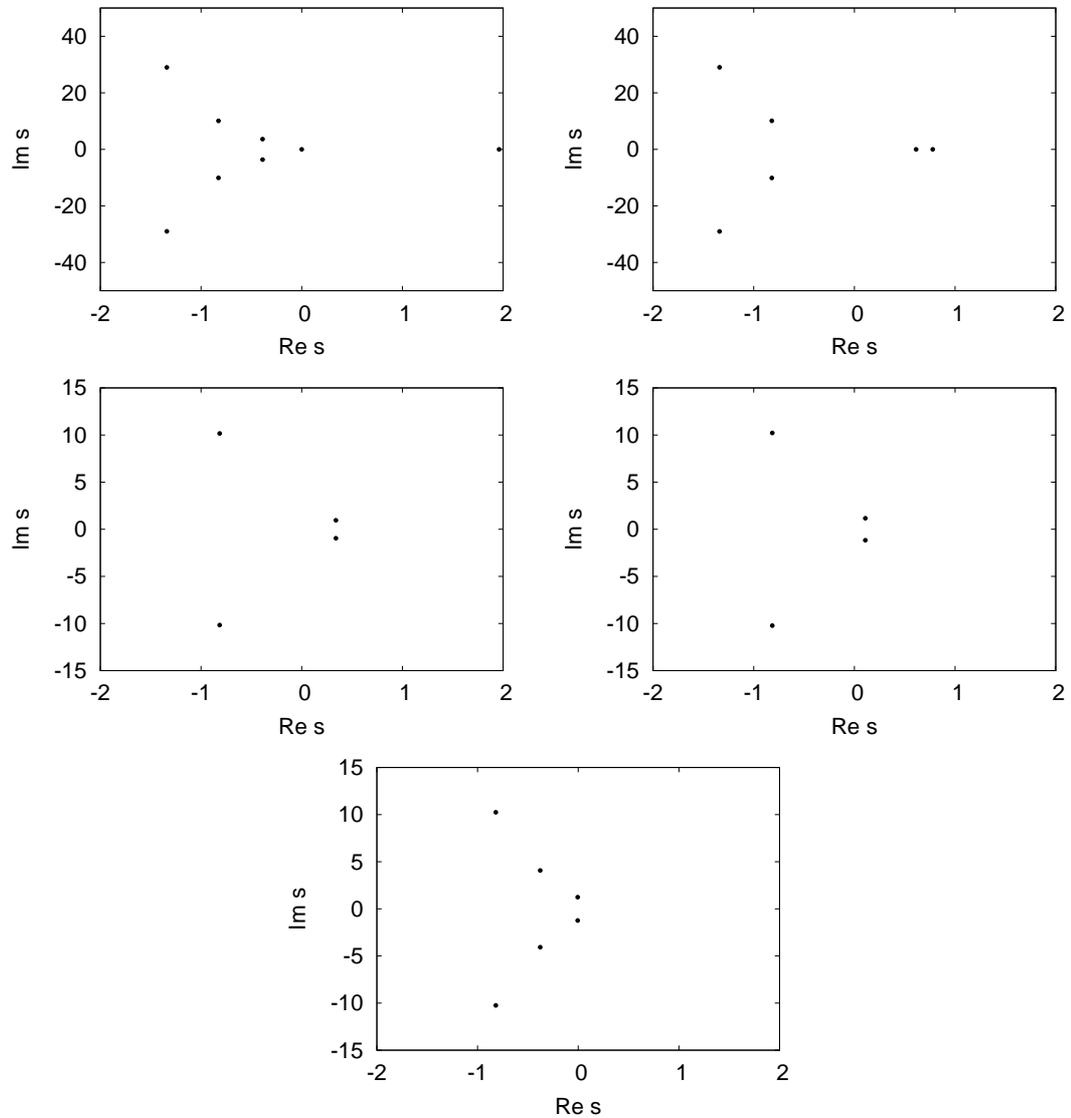


Abbildung 2.4: Wir setzen $a = -2$, $\tau = 2$ und betrachten die Änderung der führenden charakteristischen Wurzeln mit wachsendem b : Die beiden reellen Lösungen nähern sich in der rechten Halbebene. Nach einem kritischen Wert bilden sie ein paar komplex konjugierter Wurzeln, deren Realteil mit zunehmendem b sinkt und sich der imaginären Achse nähert. Links oben: $b = -2$. Rechts oben: $b = -1.2$. Mitte links: $b = 0$. Mitte rechts: $b = 1$. Unten gilt $b = 1.6$, die imaginäre Achse wurde überschritten.

Aus (2.13) kann man auch kritische Werte für a, b bei beliebigen ω und τ bestimmen

$$a = \frac{-\omega}{\sin(\omega\tau)}, \quad b = -\omega \cot(\omega\tau). \quad (2.16)$$

Für $a < -\frac{1}{\tau}$ beschreiben diese beiden Gleichungen eine Kurve im Parameterraum (a, b) , parametrisiert durch ω . Auf der Kurve sind die Fixpunkte von Gleichung (2.6) marginal stabil. Mit der Geraden $a = b$ ergibt sich ein kegelförmiges Gebiet, in dem jede Lösung $x(t)$ zum stabilen Fixpunkt $x_0 = 0$ geht, siehe Abbildung 2.5. Man beachte, dass dieses Gebiet unabhängig von der Wahl der Anfangsfunktion $g(t)$ ist.

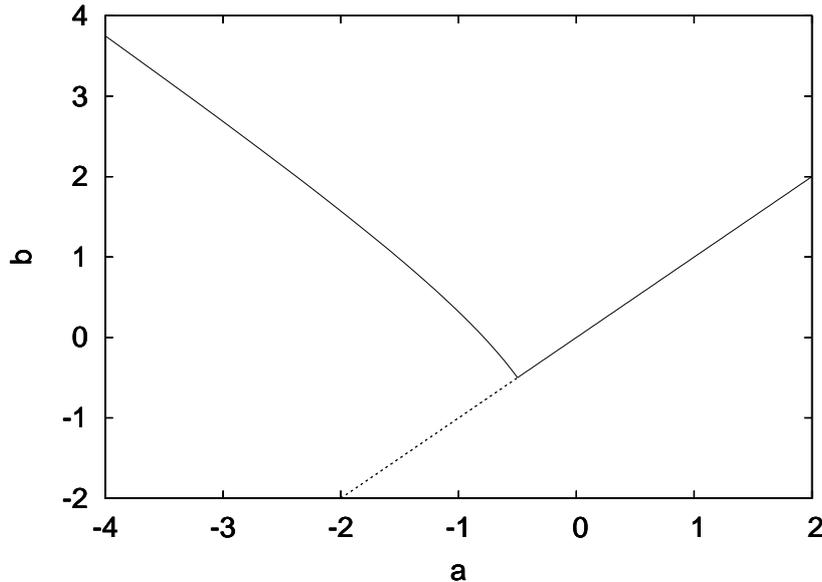


Abbildung 2.5: Stabilitätsgebiet des Fixpunktes $x_0 = 0$ des deterministischen Systems mit $\tau = 2$. Für $a \geq -\frac{1}{\tau}$ sind die führenden charakteristischen Wurzeln reell. Für $a \leq -\frac{1}{\tau}$ existieren führende konjugiert komplexe Wurzeln, die Lösungen haben oszillatorisches Verhalten. Im oberen Bereich gilt $\max_n \operatorname{Re}(s_n) < 0$ (stabil), im unteren Bereich gilt $\max_n \operatorname{Re}(s_n) > 0$ (instabil). Im Fall $a = b$ gibt es noch den Fixpunkt $x_0 = \text{const}$. Dieser ist stabil bei $a \geq -\frac{1}{\tau}$ (durchgezogene Linie) und instabil bei $a \leq -\frac{1}{\tau}$ (gepunktete Linie). Auf dieser Linie ist nur für die Anfangsbedingung $g(t) = x_0$ die konstante Lösung möglich, siehe Rechnung in Abschnitt 2.2.

2.2 Verhalten im marginal stabilen Fall

Wir konnten feststellen, dass unter der Bedingung $a = b > -\frac{1}{\tau}$ das deterministische System marginal stabil ist. In einigen Veröffentlichungen ([BLM⁺93a], [BLM⁺93b] und [Lip95]) ist ein kennzeichnendes Merkmal marginaler Stabilität diskutiert worden: Es besteht die Möglichkeit, einen Fixpunkt durch eine Störung beliebiger Form zu verschieben.

Zunächst wollen wir Gleichung (2.6) für eine Anfangsfunktion $g(t)$ mittels Laplacetransformation lösen

$$\int_0^\infty dt \dot{x} e^{-st} = \int_0^\infty dt ax(t-\tau)e^{-st} - \int_0^\infty dt bx(t)e^{-st}. \quad (2.17)$$

Auf der linken Seite integrieren wir partiell, auf der rechten substituieren wir das verzögerte Argument. Auf dem Intervall $[-\tau, 0]$ können wir die Anfangsfunktion einsetzen

$$\underbrace{[x(t)e^{-st}]_0^\infty}_{=-x(0)=-g(0)} + s \int_0^\infty dt x(t)e^{-st} = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^\infty dt ax(t)e^{-st} - \int_0^\infty dt bx(t)e^{-st}. \quad (2.18)$$

Das Integral über $x(t)e^{-st}$ existiert, wenn $x(t)$ höchstens exponentiell anwächst. Um-sortieren führt zu

$$\underbrace{(s + b - ae^{-s\tau})}_{=h(s)} \int_0^\infty dt x(t)e^{-st} = g(0) + e^{-s\tau} \int_{-\tau}^0 dt ag(t)e^{-st}. \quad (2.19)$$

Durch die Rücktransformation sind wir in der Lage, einen Ausdruck für $x(t)$ zu schreiben

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds e^{st} \frac{g(0) + e^{-s\tau} \int_{-\tau}^0 dt ag(t)e^{-st}}{h(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds e^{st} \frac{G(s)}{h(s)}, \quad (2.20)$$

wobei zur Abkürzung $G(s)$ eingeführt wird. Dieser Ausdruck ist ein Konturintegral. Wenn man den Integrationsweg rechts von allen Singularitäten des Integranden wählt und die Kontur nach links schließt, lässt sich der Ausdruck mit dem Residuensatz in eine Summe umformen

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Res_{s=s_n} \left(e^{st} \frac{G(s)}{h(s)} \right). \quad (2.21)$$

Die s_n sind die unendlich vielen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.8).

Wir interessieren uns zunächst für den marginal stabilen Fall $a = b > -\frac{1}{\tau}$. Wie wir in Abschnitt 2.1 sehen konnten, ist in diesem Fall $s_r = 0$ der führende Eigenwert. Dieser Wert ist entscheidend für das Langzeitverhalten von $x(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = Res_{s_r=0} \left(e^{st} \frac{G(s)}{h(s)} \right) = e^{st} \frac{G(s)}{h'(s)} \Big|_{s=0}. \quad (2.22)$$

Für große Zeiten stellt sich ein fester Wert ein, der von $g(t)$ abhängt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{g(0) + \int_{-\tau}^0 dt g(t)}{1 + a\tau}. \quad (2.23)$$

Ein weiterer interessanter Fall existiert für beliebige $a = b$ mit konstanter Anfangsbedingung $g(t) = x_0$. Wir berechnen die Funktion $G(s)$

$$G(s) = x_0 + ax_0 e^{-s\tau} \left[\frac{1}{-s} e^{-st} \right]_{-\tau}^0 = x_0 \left(1 - a \frac{e^{-s\tau}}{s} + \frac{a}{s} \right) = x_0 \frac{h(s)}{s}. \quad (2.24)$$

Es gilt damit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{x_0}{2\pi i} \int_C ds e^{st} \frac{h(s)}{sh(s)} = \frac{x_0}{2\pi i} \int_C ds \frac{e^{st}}{s} = x_0. \quad (2.25)$$

Es existiert eine konstante Lösung, auch wenn es eine Wurzel in der rechten komplexen Halbebene gibt.

Aus den numerischen Bestimmungen der charakteristischen Wurzeln, siehe 2.4, sieht man, dass bei $a < -\frac{1}{\tau}$ an der Schwelle der marginalen Stabilität oszillierende Lösungen mit konstanter Amplitude auftreten. Aus (2.13) können wir ablesen, dass für $b = 0$ bei $\tau_c = \frac{\pi}{2|a|}$ ein komplexes Paar von Lösungen die imaginäre Achse überschreitet. Bei $a = \frac{\pi}{2\tau}$ und $b = 0$ ist dieses Paar nicht führend, da eine reelle positive Wurzel existiert. $a = -\frac{\pi}{2\tau}$ und $b = 0$ ist also ein Beispiel, bei dem es eine führende imaginäre Wurzel gibt.

Bei einem allgemeinen $s = \pm i\omega$ ergibt sich für die Lösung

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\underbrace{e^{i\omega t} \frac{g(0) + e^{-i\omega\tau} \int_{-\tau}^0 dt' ag(t') e^{-i\omega t'}}_{:= Ae^{i\phi}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\omega t} \frac{g(0) + e^{i\omega\tau} \int_{-\tau}^0 dt' ag(t') e^{i\omega t'}}{\underbrace{1 + \tau a e^{i\omega\tau}}_{:= Ae^{-i\phi}}} \right] \\ &= A \cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei die Amplitude A und die Phasenverschiebung ϕ nicht von der Zeit abhängig sind.

Wenn bereits eine oszillierende Lösung $x(t)$ mit konstanter Amplitude vorliegt und eine zeitlich begrenzte Störung einsetzt, so strebt $x(t)$ gegen eine neue oszillierende Lösung mit verschobener Amplitude. Diese Verschiebung kann man berechnen.

Es gelten also die Relationen (2.16) für a, b , so dass die Fixpunkte von (2.6) marginal stabil sind. Wir betrachten

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau) - x(t) + F(t), \quad x(t) = g(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (2.27)$$

Die Störung hat die Form

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & : \quad \forall t \text{ mit } t' \leq t \leq t'' \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.28)$$

Vor Einsetzen der Störung zur Zeit t_1 hat $x(t)$ die Form

$$x_{vor}(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1). \quad (2.29)$$

Nach Ende der Störung erfolgt ein Einschwingen einer neuen oszillatorischen Lösung mit konstanter Amplitude. Nach dem Einschwingen zu der Zeit t_2 soll $x(t)$ die folgende Form haben

$$x_{nach}(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (2.30)$$

Integriert man Gleichung (2.27) auf beiden Seiten über t von t_1 bis t_2 , so erhält man mittels Substitution $s = t - \tau$

$$x(t_2) - x(t_1) = a \int_{t_1 - \tau}^{t_2 - \tau} x(s) ds - b \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt. \quad (2.31)$$

Die Integrale auf der rechten Seite spalten wir auf, so dass wir auf beiden Seiten für $x(t)$ die Lösungen $x_{vor}(t)$ bzw. $x_{nach}(t)$ einsetzen können

$$\begin{aligned} x_{nach}(t_2) - x_{vor}(t_1) &= a \int_{t_1-\tau}^{t_1} dt x_{vor}(t) - b \int_{t_2-\tau}^{t_2} dt x_{nach}(t) \\ &+ (a-b) \int_{t_1}^{t_2-\tau} dt x(t) + \int_{t'}^{t''} dt f(t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nach dem Einsetzen von (2.29) und (2.30) und dem Ausklammern der Amplituden A_1 und A_2 folgt

$$\begin{aligned} &A_2 \left[\cos(\omega_2 t_2 + \phi_2) + b \int_{t_2-\tau}^{t_2} dt \cos(\omega_2 t + \phi_2) \right] \\ = &A_1 \left[\cos(\omega_1 t_1 + \phi_1) + a \int_{t_1-\tau}^{t_1} dt \cos(\omega_1 t + \phi_1) \right] + (a-b) \int_{t_1}^{t_2-\tau} dt x(t) + \int_{t'}^{t''} dt f(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die neue Amplitude A_2 ist damit abhängig von der alten A_1 . Das Integral $\int_{t_1}^{t_2-\tau} dt x(t)$ ist allerdings schwierig zu bestimmen, da das genaue Verhalten von $x(t)$ zwischen t_1 und $t_2 - \tau$ nicht bekannt ist.

Für den Fall $a = b$ und einer konstanten Lösung können wir jedoch die Verschiebung genau bestimmen. In diesem Fall fällt das nicht bekannte Integral weg, da $a - b = 0$ ist. Die konstante Lösung ergibt, dass $\omega_{1,2} = \phi_{1,2} = 0$ betragen. Die Kosinusterme ergeben den Wert 1 und (2.33) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} A_2[1 + b\tau] &= A_1[1 + a\tau] + \int_{t'}^{t''} dt f(t) \\ \Leftrightarrow A_2 &= A_1 \frac{1 + a\tau}{1 + b\tau} + \frac{\int_{t'}^{t''} dt f(t)}{1 + b\tau} = A_1 + \frac{\int_{t'}^{t''} dt f(t)}{1 + b\tau}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Verschiebung ist proportional zum Integral über die Störung.

2.3 Verhalten im allgemeinen Fall

Die Fundamentallösung ist die Lösung der DDGL zur Anfangsfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad \forall t \in [-\tau, 0) \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Zu dieser Anfangsfunktion finden wir die exakte Lösung von (2.6) mittels stückweiser Integration

$$x_0(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} (t - k\tau)^k e^{-b(t-k\tau)}, \quad n\tau \leq t \leq (n+1)\tau. \quad (2.36)$$

Dieses Zwischenergebnis zum Finden einer allgemeinen Lösung $x(t)$ ist auf verschiedenen Wegen zu erhalten. Setzt man die Anfangsfunktion (2.35) in (2.20) ein, so erkennt man, dass x_0 ebenso durch inverse Laplacetransformation von $h^{-1}(s)$ zu berechnen ist. Ein dritter Weg ist durch Verwenden von Lambertschen W-Funktionen möglich, siehe [ASJ06].

Mit der Fundamentallösung $x_0(t)$ ist die allgemeine Lösung $x(t)$ für beliebige Anfangsfunktionen $g(t)$ bekannt

$$x(t) = x_0(t)g(0) + a \int_{-\tau}^0 ds x_0(t-s-\tau)g(s). \quad (2.37)$$

Einen Satz, auf den wir noch zurückgreifen werden, findet man in [Hal77].

Satz 2.1. Sei $\alpha_0 = \max_n \{Re(s_n)\}$, wobei die s_n die charakteristischen Wurzeln von (2.8) sind. Dann gilt: Für jedes $\alpha > \alpha_0$ gibt es eine Konstante $K(\alpha)$, sodass

$$|x_0(t)| \leq K(\alpha)e^{\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (2.38)$$

Dieser Satz beschreibt die Beschränktheit der Lösung nach oben. Insbesondere lässt sich auch hier ablesen, dass die Lösung von (2.6) gegen Null geht, wenn alle charakteristischen Wurzeln in der linken Halbebene liegen. Außerdem ist sichergestellt, dass die Lösung höchstens exponentiell anwächst. Die Laplacetransformierte aus Abschnitt 2.2 existiert.

2.4 Verhalten im Falle kleiner Verzögerungen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob eine DDGL im Falle kleiner Verzögerungen in eine gewöhnliche DGL umgeformt werden kann. Diese Umformung wird vor allem interessant, wenn man eine DDGL mit variablen Koeffizienten untersucht, da es für diesen Typ keine explizite Lösung gibt. Der verzögerte Term $x(t-\tau)$ soll nach Potenzen von τ entwickelt und an geeigneter Stelle abgebrochen werden.

Im folgenden wird eine einfache lösbare DDGL nach diesem Schema umgeformt. Anschließend werden die Stabilitätseigenschaften der ursprünglichen und der umgeformten DGL untersucht.

Wir betrachten also die deterministische DDGL

$$\dot{x}(t) = x(t-\tau) - x(t). \quad (2.39)$$

Im Limes $\tau \rightarrow 0$ erhält man die Gleichung $\dot{x}(t) = 0$, deren Lösung

$$x(t) = const \quad (2.40)$$

ist. $\lambda = 0$ ist die Lösung der charakteristischen Gleichung in diesem Grenzfall. Alle angenäherten gewöhnlichen DGL sollen nach dieser Eigenschaft beurteilt werden. Wir führen eine Taylorentwicklung für $x(t-\tau)$ durch

$$x(t-\tau) = x(t) - \tau \dot{x}(t) + \frac{1}{2}\tau^2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{(-\tau)^m}{m!} x^{(m)}(t) + \frac{(-\tau)^{m+1}}{(m+1)!} x^{(m+1)}(t-\theta\tau) \quad (2.41)$$

und wollen diese nach einem geeigneten m -ten Term abbrechen. Durch Einsetzen der Entwicklung in (2.39) erhalten wir die Differentialgleichung

$$-(\tau+1)\dot{x}(t) + \frac{1}{2}\tau^2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{(-\tau)^m}{m!} x^{(m)}(t) = 0 \quad (2.42)$$

und durch den Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ die charakteristische Gleichung

$$-(1+\tau)\lambda + \frac{1}{2}\tau^2 \lambda^2 + \dots + \frac{1}{m!} (-\tau)^m \lambda^m = 0. \quad (2.43)$$

Diese Gleichung besitzt m Lösungen in der komplexen Ebene. Wir müssen nun untersuchen, wie gut diese Lösungen für kleine Verzögerungen den exakten Wert $\lambda = 0$ approximieren. Für eine Verzögerung von $\tau = 0.01$ wird für verschiedene m die Lage der charakteristischen Wurzeln dargestellt, siehe Abbildung 2.6. In Abbildung 2.7 werden zum Vergleich die Nullstellen des Quasipolynoms

$$h(\lambda) = \lambda + 1 - e^{-\lambda\tau} \quad (2.44)$$

numerisch bestimmt.

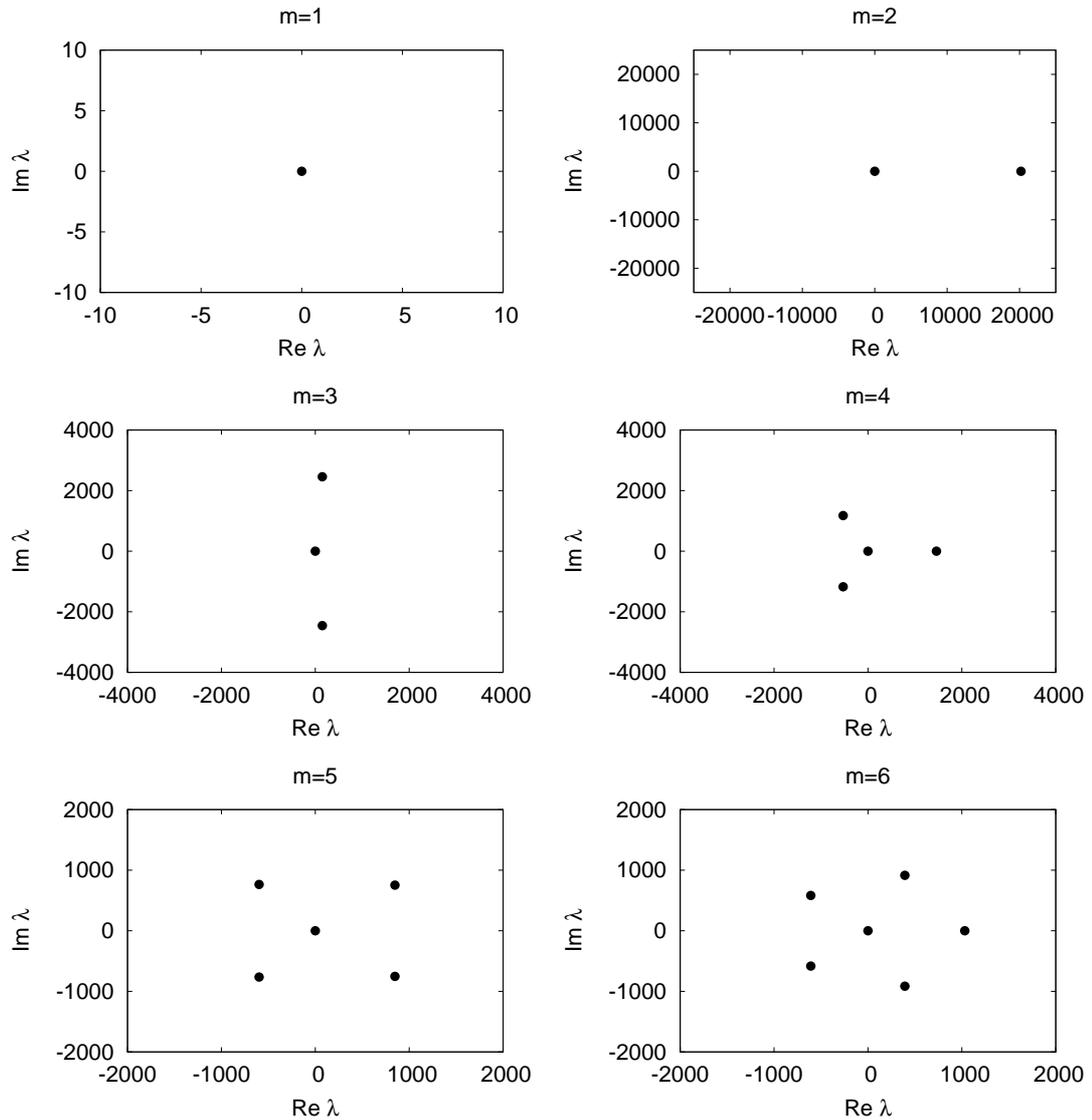


Abbildung 2.6: Lösungen der charakteristischen Gleichung (2.43) in der komplexen Ebene für $\tau = 0.01$. Die Taylorreihe wurde jeweils nach m Schritten abgebrochen.

Es ist zu erkennen, dass die Wurzel $\lambda = 0$ der genäherten DGL mit der führenden Wurzel der DDGL identisch ist. Die anderen verteilen sich in allen Richtungen der komplexen Ebene. Für diese Gleichung ist bereits ein Abbruch bei $m = 2$ nicht möglich, da es eine charakteristische Wurzel mit positivem Realteil gibt, die die asymptotischen

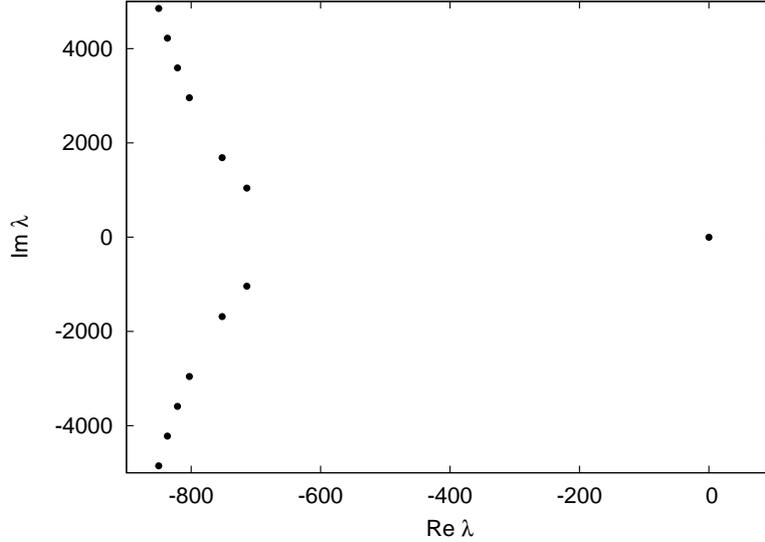


Abbildung 2.7: Numerisch bestimmte Nullstellen des Quasipolynoms (2.44) für $\tau = 0.01$.

Eigenschaften der Lösung bestimmt. Die Lösung $x(t) = \text{const}$ ist nicht erfüllt. Aus den Abbildungen erkennt man, dass offensichtlich auch aus einem Abbruch bei $m \geq 2$ immer eine Wurzel mit positivem Realteil folgt.

Diese Vermutung möchten wir für die allgemeinere Gleichung beweisen. Wir betrachten

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t) \quad (2.45)$$

und entwickeln den verzögerten Term bis zur Ordnung m . Die zu (2.43) analoge charakteristische Gleichung ist

$$a - b - (a\tau + 1)\lambda + \frac{1}{2}a\tau^2\lambda^2 + \dots + \frac{1}{m!}a(-\tau)^m\lambda^m = 0. \quad (2.46)$$

Wir teilen durch $\frac{1}{m!}a(-\tau)^m$ und erhalten

$$p(\lambda) = \lambda^m - \frac{m}{\tau}\lambda^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\tau^2}\lambda^{m-2} + \dots - \frac{(a\tau + 1)m!}{(-\tau)^m}\lambda + \frac{(a-b)m!}{a(-\tau)^m} = 0. \quad (2.47)$$

Nun können wir folgenden Satz verwenden.

Satz 2.2 (Routh-Hurwitz-Kriterium). *Genau dann haben alle Lösungen von*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.48)$$

einen negativen Realteil, wenn mit $a_0 = 1$ und $a_m = 0$ für $m > n$ die Determinanten

$$a_1, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

allesamt positiv sind.

Wenn eine Determinante negativ ist, so existiert nach dem Satz eine Lösung mit positivem Realteil. Da in (2.47) der Koeffizient $a_1 = -\frac{m}{\tau}$ kleiner als Null ist, folgt, dass für jedes $m \geq 2$ und für beliebige (a, b) eine charakteristische Wurzel mit positivem Realteil existiert. Das bedeutet, dass die Lösungen asymptotisch ansteigen. Wir haben aber bereits die Existenz von stabilen Lösungen gezeigt. Eine Entwicklung für kleine τ ist daher nur bis zur ersten Ordnung sinnvoll.

Nach [Saa67] ist eine Entwicklung bis zur Ordnung der höchsten Ableitung möglich und das Restglied $\frac{(-\tau)^{m+1}}{(m+1)!}x^{(m+1)}(t - \theta\tau)$ ist für $m \geq 2$ von der Ordnung $(\frac{1}{\tau})$.

Kapitel 3

Stabilität der stochastischen Gleichung bei additivem Rauschen

In diesem Kapitel wollen wir von einem deterministischen zu einem stochastischen Modell übergehen. Ein Ziel dieser Diplomarbeit ist, das Verhalten der DDGL mit zeitabhängigen, evtl. stochastischen Koeffizienten zu verstehen.

Zunächst wird allerdings die DDGL mit additivem Rauschen behandelt, um verschiedene Rechenmethoden kennenzulernen

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t) + \xi_t, \quad x(t) = g(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (3.1)$$

ξ_t bezeichnet ein Gaußsches weißes Rauschen. Dieses ist der Grenzfall eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, für den Varianz und inverse Korrelationszeit nach unendlich gehen, während ihr Quotient konstant bleibt

$$\sigma^2 \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma^2}{\gamma} = D. \quad (3.2)$$

Mit $\langle \dots \rangle$ bezeichnen wir die Mittelung über alle Realisierungen der stochastischen Variable. Mittelwert und Autokorrelation des stochastischen Prozesses ξ_t betragen $\langle \xi_t \rangle = 0$ und $\langle \xi_t \xi_{t'} \rangle = 2D\delta(t - t')$.

Wenn wir Gleichung (3.1) als Bilanzgleichung für eine Substanz (physikalische Größe) deuten, so bedeutet das additive Rauschen eine stochastische Quelle bzw. Senke der Substanz x .

Viele Probleme, die sich aus Gleichung (3.1) ergeben, sind in früheren Veröffentlichungen verstanden worden. Allerdings gibt es auch fehlerhafte und schwierig zu verstehende Darstellungen, weshalb die vorhandenen Quellen noch einmal sortiert werden sollen.

Die statistischen Eigenschaften der Lösung von Gleichung (3.1) sind am einfachsten zu bestimmen, indem man die explizite Lösung betrachtet. Gleichung (3.1) ist eine inhomogene DDGL mit konstanten Koeffizienten. Mit Hilfe der Fundamentallösung kann man die Lösung für alle Zeiten explizit angeben

$$x(t) = x_0(t)g(0) + a \int_{-\tau}^0 ds x_0(t - s - \tau)g(s) + \int_0^t x_0(t - s)dW_s. \quad (3.3)$$

W_t ist der Wiener-Prozess mit $\langle W_t W_{t'} \rangle = 2D \min(t, t')$.

Dass (3.3) eine Lösung von (3.1) ist, soll durch Einsetzen nachgeprüft werden.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0(t)g(0) + a \int_{-\tau}^0 ds \dot{x}_0(t-s-\tau)g(s) + \underbrace{\frac{d}{dt} \int_0^t x_0(t-s)dW_s}_{\int_0^t \dot{x}_0(t-s)dW_s + \xi(t)} \\
&= ag(0)x_0(t-\tau) - bg(0)x_0(t) + a^2 \int_{-\tau}^0 ds x_0(t-s-2\tau)g(s) \\
&\quad - ab \int_{-\tau}^0 ds x_0(t-s-\tau)g(s) + \int_0^t ax_0(t-s-\tau)dW_s \\
&\quad - b \int_0^t x_0(t-s)dW_s + \xi(t) \\
&= ax(t-\tau) - bx(t) + \xi(t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Amann, Schöll und Just [ASJ06] können zeigen, dass die Lösung (3.3) formal als eine unendliche Summe von Ornstein-Uhlenbeck Prozessen geschrieben werden kann.

Wir überprüfen, ob Gleichung (3.1) einen Fixpunkt besitzen kann. Wir setzen $\dot{x}(t) = 0$ und erhalten

$$bx(t) - ax(t-\tau) = \xi_t. \tag{3.5}$$

Diese Relation ist nicht erfüllbar, da $x(t)$ ein nichtvorwegnehmendes Funktional von ξ_t ist und die stochastischen Größen $x(t)$ und ξ_t somit unabhängig voneinander sind. Auch im Limes $t \rightarrow \infty$ kann $x(t)$ jeden beliebigen Wert annehmen. Nach großen Zeiten erwarten wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die nicht gegen die Deltadistribution konvergiert. Diese möchten wir bestimmen.

3.1 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der verzögerten Gleichung bei additivem Rauschen

Die deterministischen Terme in (3.3) konvergieren gegen Null, wenn die Fundamentallösung gegen Null konvergiert. Das gilt, wenn der größte Realteil der Wurzeln der charakteristischen Gleichung kleiner als Null ist, siehe Satz 2.1. Nur für diesen Fall ist die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung möglich.

Die folgenden Rechnungen gelten also für den kegelförmigen Parameterbereich aus Abbildung 2.5.

Für $x(t)$ gilt nach dem Abklingen der deterministischen Terme

$$x(t) = \int_0^t x_0(t-s) \underbrace{dW_s}_{\xi_s ds} = (x_0 * \xi)(t) \equiv L[\xi(t)]. \tag{3.6}$$

Nach Papoulis [Pap65] ist $L[\xi(t)]$ eine lineare zeitinvariante Transformation des stationären Prozesses $\xi(t)$, da

$$L[a\xi(t)] = aL[\xi(t)] \text{ und } x(t+\varepsilon) = L[\xi(t+\varepsilon)].$$

Definition Ein stochastischer Prozess $\eta(t)$ heißt stationär im weiteren Sinne, wenn gilt

$$\langle \eta(t) \rangle = \text{const} \text{ und } \langle \eta(t+u)\eta(t) \rangle = R(u).$$

Aus dieser Definition folgt, dass das Gaußsche weiße Rauschen $\xi(t)$ stationär im weiteren Sinne ist. In [Pap65] wird bewiesen, dass eine lineare zeitinvariante Transformation eines stationären Prozesses im weiteren Sinne wieder stationär im weiteren Sinne ist.

Der Prozess (3.3) ist nach großen Zeiten stationär im weiteren Sinne und für die Verteilungsfunktionen gilt

$$P(x, t) = P(x), \quad P(x_1, x_2, s, t) = P(x_1, x_2, s - t). \quad (3.7)$$

Nach Kuchler und Mensch [KM92] konvergiert die Einpunktverteilung gegen eine Gaußsche. Diesen Beweis wollen wir nachvollziehen.

Die charakteristische Funktion des Prozesses (3.6) lautet

$$\Phi(s) = \left\langle e^{is \int_0^t x_0(t-s) dW_s} \right\rangle. \quad (3.8)$$

Die Entwicklung der Exponentialfunktion führt zu

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} \left\langle \left(\int_0^t x_0(t-s) dW_s \right)^n \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^n}{n!} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x_0(t-s') x_0(t-s'') \dots x_0(t-s^{(n)}) M_n ds' ds'' \dots ds^{(n)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei zur Abkürzung $M_n = \langle \xi_{s'} \xi_{s''} \dots \xi_{s^{(n)}} \rangle$ eingeführt wird. Es gilt das Momententheorem für M_n

$$M_n = \begin{cases} 0 & : \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \sum \langle \xi_p \xi_q \rangle \langle \xi_r \xi_s \rangle \dots \langle \xi_u \xi_v \rangle & : \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Die Summe läuft über alle möglichen Paare der ξ_i . Es werden alle geraden Momente betrachtet und wir können n durch $2n$ ersetzen. Das Momententheorem für M_{2n} ist eine Summe über $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ Terme. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^{2n}}{(2n)!} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x_0(t-s') x_0(t-s'') \dots x_0(t-s^{(2n)}) M_{2n} ds' ds'' \dots ds^{(2n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^{2n}}{(2n)!} \sum_{\text{Paare}} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x_0(t-s') x_0(t-s'') \dots x_0(t-s^{(2n)}) \\ &\quad \times (2D)^n \delta(s' - s'') \delta(s''' - s'''') \dots \delta(s^{(2n-1)} - s^{(2n)}) ds' ds'' \dots ds^{(2n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^{2n}}{(2n)!} (2D)^n \sum_{\text{Paare}} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t x_0^2(t-s') x_0^2(t-s''') \dots x_0^2(s^{(2n-1)}) ds' ds'' \dots ds^{(2n-1)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der Ausdruck unter der Summe der Paare beträgt $\left(\int_0^t x_0^2(t-s) ds \right)^n$ und ist für jeden Summanden gleich. Wir können schreiben

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(is)^{2n}}{(2n)!} \left(2D \int_0^t x_0^2(t-s) ds \right)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= e^{-s^2 D \int_0^t x_0^2(t-s) ds} = e^{-s^2 D \int_0^t x_0^2(s) ds}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Im letzten Schritt wurde die Substitution $t - s \rightarrow s$ verwendet. Die charakteristische Funktion können wir auch mit Hilfe der Kumulanten κ_i schreiben als

$$\Phi(s) = e^{is\kappa_1 - \frac{s^2}{2}\kappa_2 - i\frac{s^3}{6}\kappa_3 + \dots} \quad (3.13)$$

Die Kumulanten des Prozesses (3.6) sind somit

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0, \\ \kappa_2 &= 2D \int_0^t x^2(s) ds, \\ \kappa_{i \geq 3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit haben wir gezeigt, dass (3.6) ein Gaußscher Prozess mit Mittelwert Null und Varianz $2D \int_0^t x_0^2(s) ds$ ist.

3.2 Stabilität des ersten Momentes bei additivem Rauschen

Nun wollen wir (3.1) über alle Realisierungen des treibenden Prozesses ξ_t mitteln

$$\int \dot{x}_t[\xi] P(\xi) d\xi = a \int x_{t-\tau}[\xi] P(\xi) d\xi - b \underbrace{\int x_t[\xi] P(\xi) d\xi}_{=0} + \int \xi P(\xi) d\xi. \quad (3.15)$$

Das Ziel dieser Betrachtung ist das Aufstellen einer deterministischen DDGL für $\int x_t P(x) dx \equiv \langle x(t) \rangle$. Allgemein gilt für die Beziehung zwischen den Verteilungen das Lemma von van Kampen

$$P(x, t) = \int d\xi \delta(x - x_t[\xi]) P(\xi). \quad (3.16)$$

Die Zeitunabhängigkeit der Einpunktverteilung des Prozesses $x(t)$ haben wir im vorigen Abschnitt gezeigt. Es gelten deshalb

$$\begin{aligned} \int d\xi x_t[\xi] P(\xi) &= \int dx x P(x) = \langle x(t) \rangle, \\ \int x_{t-\tau}[\xi] P(\xi) d\xi &= \langle x(t - \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

In Gleichung (3.15) ziehen wir die Ableitung nach der Zeit heraus und erhalten

$$\frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle = a \langle x(t - \tau) \rangle - b \langle x(t) \rangle. \quad (3.18)$$

Diese Bewegungsgleichung des ersten Momentes ist identisch mit der Gleichung (2.6). Es gibt einen Fixpunkt $\langle x \rangle = 0$, dessen Stabilitätsgebiet identisch ist mit der Abbildung 2.5.

3.3 Stabilität des zweiten Momentes bei additivem Rauschen

Die Bestimmung des 2. Momentes ist ein aufwendigeres Problem als die des Mittelwertes, da nicht wie vorher sofort eine Bewegungsgleichung für diese Größe zu berechnen ist. Dennoch gibt es Ansätze verschiedener Autoren ([MN95], [GLL99], [YO], [KM92]), die in diesem Abschnitt verglichen werden sollen.

Wir betrachten erneut die Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t) + \xi(t), \quad x(t) = g(t) \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (3.19)$$

Für einen Prozess

$$dx(t) = f(x(t), x(t - \tau))dt + g(x)dw_t \quad (3.20)$$

gilt für $G(x(t)) \in C^2$ nach der Ito-Formel

$$\begin{aligned} dG(x(t)) = & \left\{ f(x(t), x(t - \tau)) \frac{d}{dx} G(x(t)) + Dg^2(x(t)) \frac{d^2}{dx^2} G(x(t)) \right\} dt \\ & + g(x(t)) \frac{d}{dx} G(x(t)) dw_t. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Mit $G(x(t)) = x^2(t)$, $f(x(t), x(t - \tau)) = ax(t - \tau) - bx(t)$ und $g(x(t)) = 1$ erhält man für Gleichung (3.19)

$$d(x^2(t)) = \{[ax(t - \tau) - bx(t)]2x(t) + 2D\} dt + 2x(t)dw_t. \quad (3.22)$$

Eine Mittelung dieser Gleichung ergibt

$$\langle dx^2(t) \rangle = \{2a \langle x(t - \tau)x(t) \rangle - 2b \langle x^2(t) \rangle\} dt + 2Ddt, \quad (3.23)$$

da erneut die Ito-Eigenschaft $\langle x(t)dw_t \rangle = 0$ gilt. Division durch dt und Einführung der Notation $\langle x(t)x(s) \rangle = K(t, s)$ ergibt

$$\dot{K}(t, t) = 2aK(t - \tau, t) - 2bK(t, t) + 2D. \quad (3.24)$$

Mackey und Nechaeva [MN95] leiten diese Beziehung ebenfalls her. Dort wird anschließend angenommen, dass $K(t, t)$ für große Zeiten einen stationären Wert erreicht. Daraus folgt, dass $\dot{K}(t, t)$ gegen Null geht und auch $K(t - \tau, t)$ einen konstanten Wert erreicht

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, t) &\equiv K_\infty(0), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K(t - \tau, t) &\equiv K_\infty(\tau). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aus (3.24) folgt

$$0 = 2aK_\infty(\tau) - 2bK_\infty(0) + 2D. \quad (3.26)$$

Diese Konstanten $K_\infty(\tau)$ und $K_\infty(0)$ werden in [MN95] gleichgesetzt und können somit berechnet werden. Diese Aussagen wollen wir überprüfen.

Aus Abschnitt 3.1 kennen wir bereits Lösung und Varianz des Prozesses (3.19) nach großen Zeiten im stabilen Bereich des Fixpunktes $\langle x \rangle = 0$. Nun möchten wir einen Ausdruck für $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t + t_i)x(t + t_j) \rangle$ finden. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t + t_i)x(t + t_j) \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \int_0^{t+t_i} x_0(t + t_i - s)dw_s \int_0^{t+t_j} x_0(t + t_j - s')dw_{s'} \right\rangle \\ &= 2D \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t+t_i} ds \int_0^{t+t_j} ds' x_0(t + t_i - s)x_0(t + t_j - s')\delta(s - s'), \end{aligned} \quad (3.27)$$

da $\langle dW_s dW_{s'} \rangle = \langle \xi_s \xi_{s'} \rangle ds ds' = 2D \delta(s - s') ds' ds$ gilt. Im nächsten Schritt nehmen wir an, dass $t_j > t_i$ ist und erhalten durch Integration über s'

$$\begin{aligned} 2D \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t+t_i} ds x_0(t+t_i-s) x_0(t+t_j-s) &= -2D \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t+t_i}^0 du x_0(u) x_0(u+t_j-t_i) \\ &= 2D \int_0^\infty du x_0(u) x_0(u+t_j-t_i). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Für ein beliebiges Zeitintervall $u = t_j - t_i$ gilt, vergleiche [KM92],

$$K_\infty(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t+t_i) x(t+t_j) \rangle = 2D \int_0^\infty ds x_0(s+|u|) x_0(s). \quad (3.29)$$

Aus der Abschätzung $|x_0(s)| \leq K(\alpha) e^{\alpha t}$, siehe Satz 2.1, folgt die Quadratintegrierbarkeit von x_0 für $\alpha < 0$. Die Kovarianz ist also genau dann beschränkt, wenn die Lösung der zugehörigen deterministischen Gleichung stabil ist. Ebenso gilt die Symmetriebedingung

$$K_\infty(u) = K_\infty(-u). \quad (3.30)$$

Es ist nun möglich, über die unendlich vielen Summanden von $x_0(t)$ die Kovarianz für einen bestimmten Fall zu berechnen und damit die Aussage $K_\infty(\tau) = K_\infty(0) \equiv K^*$ zu überprüfen. Für den allgemeinen Fall einen Ausdruck für K_∞ zu finden, bleibt eine schwierige Aufgabe.

Die Größen $K(t, t)$ und $K(t, t - \tau)$ erreichen im stabilen Bereich von x_0 tatsächlich einen konstanten Wert. Im allgemeinen sind sie jedoch nicht gleich. Für den Spezialfall $a = 0$ und beliebige b nimmt die Fundamentallösung eine besonders einfache Form an und wir können $K_\infty(0)$ und $K_\infty(\tau)$ berechnen. Da in (2.36) nur die $k = 0$ Terme beitragen, gilt

$$\begin{aligned} x_0(s) &= e^{-bs}, \\ x_0(s + \tau) &= e^{-b(s+\tau)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} K_\infty(\tau) &= \int_0^\infty ds x_0(s) x_0(s + \tau) = \int_0^\infty ds e^{-bs} e^{-b(s+\tau)} = \frac{e^{-b\tau}}{2b}, \\ K_\infty(0) &= \int_0^\infty ds x_0(s) x_0(s) = \int_0^\infty ds e^{-bs} e^{-bs} = \frac{1}{2b}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die Annahme $K_\infty(\tau) = K_\infty(0)$ ist nur für $\tau = 0$ richtig.

Anschließend wird in [MN95] der Ansatz $K(s, t) = K^* + Z(s, t)$ mit $Z(s, t) \sim e^{\lambda(s+t)}$ gemacht. Es wird also angenommen, dass für die Zeitabhängigkeit der Zweipunktverteilungsfunktion gilt

$$P(x_1, x_2, s, t) = P(x_1, x_2, s + t). \quad (3.33)$$

Das steht jedoch im Gegensatz zu (3.7) und ist falsch. Dieser Ansatz reicht noch nicht aus, um einen allgemeinen Ausdruck für K_∞ zu finden.

3.3.1 Integraldarstellung der Kovarianz

Dieser Ansatz geht auf Überlegungen der Autoren Guillouzic, L'Heureux und Longtin [GLL99] zurück. Es wird zunächst eine Bewegungsgleichung für $\langle x(t) x(t+u) \rangle$ nach Abklingen der Anfangsfunktion hergeleitet. Diese soll dann mittels Fouriertransformation gelöst werden.

Aus Gleichung (3.19) folgt mit der Ito-Formel

$$\begin{aligned}
d(x(t_1)x(t_2)) &= x(t_1)dx(t_2) + x(t_2)dx(t_1) \\
&= [x(t_1)ax(t_2 - \tau) - bx(t_1)x(t_2)]dt_2 + x(t_1)dW(t_2) \\
&\quad + [ax(t_1 - \tau)x(t_2) - bx(t_1)x(t_2)]dt_1 + x(t_2)dW(t_1).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

In dieser Formel ist zu beachten, dass t_1 und t_2 unabhängige Variablen sind, es gilt deshalb $dt_1 \neq dt_2$. Wegen $\langle x(t_1)dW(t_2) \rangle = 0$ für $t_2 > t_1$ ergibt die Mittelung

$$\begin{aligned}
\langle d(x(t_1)x(t_2)) \rangle &= [a\langle x(t_1)x(t_2 - \tau) \rangle - b\langle x(t_1)x(t_2) \rangle]dt_2 \\
&\quad + [a\langle x(t_1 - \tau)x(t_2) \rangle - b\langle x(t_1)x(t_2) \rangle]dt_1 + \langle x(t_2)dW(t_1) \rangle.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Aus (3.7) entnehmen wir, dass $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ eine Funktion der Zeitdifferenz $u = t_2 - t_1$ ist. Wir möchten nun die Zeitabhängigkeit von $\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle$ bestimmen. Yamane und Ohira [YO] finden für den Fall $a = -\beta$, $b = 0$ einen Ausdruck für den Mittelwert $\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle$ und beweisen diesen mit vollständiger Induktion. $\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle$ lässt sich aber auch direkt und für den allgemeinen Fall bestimmen. Nach großen Zeiten gilt wegen (3.6)

$$\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle = \left\langle \int_0^{t_2} ds x_0(t_2 - s)\xi_s\xi_{t_1} \right\rangle = \int_0^{t_2} ds x_0(t_2 - s)\delta(s - t_1)2D = 2Dx_0(t_2 - t_1). \tag{3.36}$$

$\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle$ ist also auch eine Funktion von $u = t_2 - t_1$. Wir führen die Notation $\langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle \equiv X_\xi(u)$ ein. In Abbildung 3.1 wird X_ξ dargestellt.

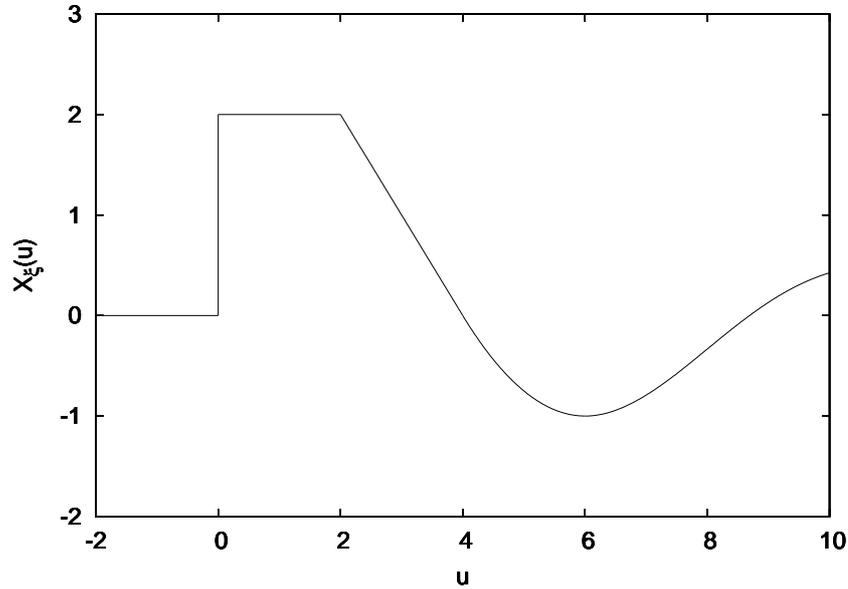


Abbildung 3.1: Die Funktion $X_\xi(u)$ aus Gleichung (3.36) ist die Fundamentallösung multipliziert mit $2D$. Diese wird hier mit $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ und $\tau = 2$ dargestellt. Wir wählen $D=1$.

Eine Probe von Gleichung (3.35) soll durchgeführt werden, indem man $t_2 \rightarrow t_1$ gehen lässt und die Äquivalenz mit Gleichung (3.23) überprüft. Wegen $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} x_0(t_2 -$

$t_1) = 1$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \langle d(x(t_1)x(t_2)) \rangle &= 2a \langle x(t_1)x(t_1 - \tau) \rangle - 2b \langle x(t_1)x(t_1) \rangle dt_1 + \lim_{t_2 \rightarrow t_1} 2Dx_0(t_2 - t_1)dt_1 \\ &= 2a \langle x(t_1)x(t_1 - \tau) \rangle - 2b \langle x(t_1)x(t_1) \rangle dt_1 + 2Ddt_1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Eine Ableitung von (3.35) nach t_1 ergibt

$$\frac{d}{dt_1} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = a \langle x(t_1 - \tau)x(t_2) \rangle - b \langle x(t_1)x(t_2) \rangle + \langle x(t_2)\xi(t_1) \rangle. \quad (3.38)$$

In der Notation von vorher lautet mit $u = t_2 - t_1$ und $dt_1 = -du$ diese Gleichung

$$\frac{d}{du} K_\infty(u) = -aK_\infty(u + \tau) + bK_\infty(u) - X_\xi(u). \quad (3.39)$$

Diese Formel wurde auch in [GLL99] für den Spezialfall $a = -\alpha$ und $b = 0$ hergeleitet. Die Ableitung der Funktion $K_\infty(u)$ nach u verschwindet nicht. Im Limes $u \rightarrow 0$ ist keine Äquivalenz mit (3.26) herzuleiten, da wir nun verschiedene Funktionsargumente haben. Durch Vergleich von (3.26) mit (3.39) bei $u = 0$ können wir aber $\frac{d}{du} K_\infty(u) \Big|_{u=0}$ berechnen. Da $X_\xi(u)$ an der Stelle $u = 0$ eine Unstetigkeit besitzt, müssen wir zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Ableitung unterscheiden

$$\frac{d}{du} K_\infty(u) \Big|_{u=0+} = -aK_\infty(\tau) + bK_\infty(0) - 2D = -D, \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{du} K_\infty(u) \Big|_{u=0-} = -aK_\infty(\tau) + bK_\infty(0) = D. \quad (3.41)$$

Wir erwarten einen schematischen Verlauf von $K_\infty(u)$ wie in Abbildung 3.2.

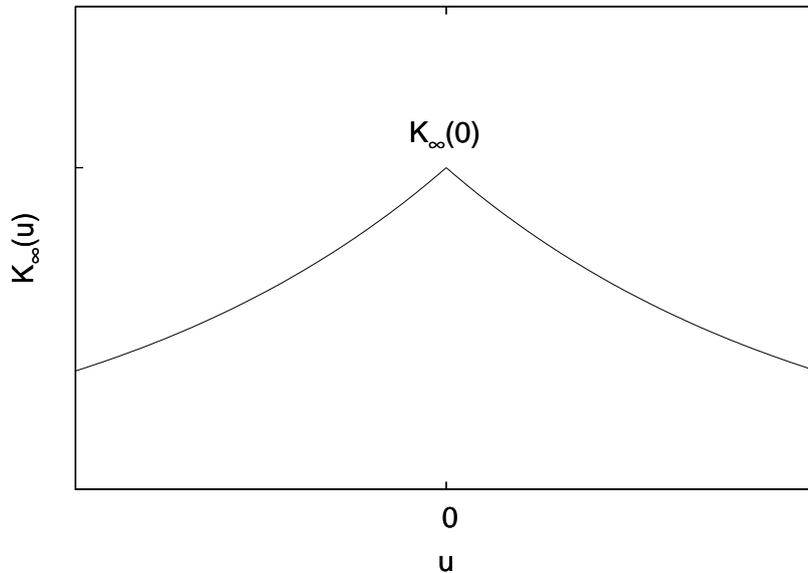


Abbildung 3.2: Erwarteter Verlauf der Funktion $K_\infty(u)$.

Die Gleichung (3.39) zur Bestimmung von $K_\infty(u)$ ist eine DDGL vom vorauseilenden Typ. Das Argument ist diesmal nicht die Zeit, sondern die Zeitdifferenz u . $K_\infty(u)$ wird für alle $u \in \mathbb{R}$ gesucht, wobei eine Anfangsfunktion nicht gegeben ist. Es soll jedoch die Annahme gemacht werden, dass die Funktion $K_\infty(u)$ an den Rändern gegen Null geht, und der Prozess $x(t)$ eine endliche Korrelationszeit besitzt. Es zeigt sich, dass mit dieser Forderung die DDGL mit Fouriertransformation gelöst werden kann. Wir multiplizieren (3.39) mit $e^{i\omega u}$ und integrieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \dot{K}_\infty(u) e^{i\omega u} = -a \int_{-\infty}^{\infty} du K_\infty(u+\tau) e^{i\omega u} + b \int_{-\infty}^{\infty} du K_\infty(u) e^{i\omega u} - \int_{-\infty}^{\infty} dt X_\xi e^{i\omega u}. \quad (3.42)$$

Umformen führt zu

$$\underbrace{[K_\infty(u) e^{i\omega u}]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} du K_\infty(u) e^{i\omega u} = -a \int_{-\infty}^{\infty} du K_\infty(u) e^{i\omega u} e^{-i\omega\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} du b K_\infty(u) e^{i\omega u} - \int_{-\infty}^{\infty} dt X_\xi e^{i\omega u}. \quad (3.43)$$

Nun können wir einen Ausdruck für die Fouriertransformierte angeben

$$\mathcal{F}\{K_\infty(u)\} = \frac{\mathcal{F}\{X_\xi\}}{i\omega - a e^{-i\omega\tau} + b}. \quad (3.44)$$

Die Fouriertransformierte von X_ξ ist auf direktem Wege nicht zu bestimmen, da X_ξ eine Funktion von $x_0(u)$ ist. Dieses x_0 besteht jedoch aus einer Summe von nicht integrierbaren Polynomen. Wir müssen deswegen eine Bewegungsgleichung für diesen Term berechnen.

Aus der Ito-Formel (3.21) mit $G(x(t_2)) = x(t_2)\xi(t_1)$ erhält man

$$d(x(t_2)\xi(t_1)) = [ax(t_2 - \tau) - bx(t_2)]\xi(t_1)dt_2 + \xi(t_1)dW_{t_2}. \quad (3.45)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\frac{d}{du} X_\xi(u) = aX_\xi(u - \tau) - bX_\xi(u) + 2D \langle \xi_{t_2} \xi_{t_1} \rangle. \quad (3.46)$$

Auch diese Gleichung wurde in [GLL99] hergeleitet. Mit ihr kann die gesuchte Fouriertransformierte ausgerechnet werden

$$\underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{d}{du} X_\xi(u)\right\}}_{=-i\omega \mathcal{F}\{X_\xi(u)\}} = a \underbrace{\mathcal{F}\{X_\xi(u - \tau)\}}_{=e^{i\omega\tau} \mathcal{F}\{X_\xi(u)\}} - b \mathcal{F}\{X_\xi(u)\} + 2D \underbrace{\mathcal{F}\{\delta(t_2 - t_1)\}}_{=1}. \quad (3.47)$$

Es folgt

$$\mathcal{F}\{X_\xi(u)\} = \frac{2D}{-i\omega - a e^{i\omega\tau} + b}. \quad (3.48)$$

Aus (3.44) und (3.48) ergibt sich für das Spektrum von x

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{K_\infty(u)\} &= \frac{2D}{(-i\omega - a e^{i\omega\tau} + b)(i\omega - a e^{-i\omega\tau} + b)} \\ &= \frac{2D}{\omega^2 + a^2 + b^2 + 2\omega a \sin(\omega\tau) - 2ab \cos(\omega\tau)}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

und für die Kovarianz

$$K_\infty(u) = \frac{2D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega u}}{\omega^2 + a^2 + b^2 + 2\omega a \sin(\omega\tau) - 2ab \cos(\omega\tau)}. \quad (3.50)$$

Dieses Integral ist nicht sofort zu berechnen. Eine Möglichkeit ist, die Nullstellen des Nenners zu bestimmen, um dann die Residuentheorie anzuwenden. Der Nenner besitzt jedoch unendlich viele Nullstellen in der komplexen Ebene. In der Arbeit von [Ohi00] werden einige Nullstellen numerisch bestimmt, um aus ihnen einzelne Werte der Funktion $K_\infty(u)$ zu berechnen. Diese Werte werden dort mit Werten der Lösung aus folgendem Abschnitt verglichen und stimmen mit diesen überein.

3.3.2 Analytische Lösung der Kovarianz

Ein zweiter Weg, um einen analytischen Ausdruck für die Kovarianz zu gewinnen, basiert auf Küchler und Mensch [KM92]. Es gibt eine Möglichkeit, eine gewöhnliche DGL für $K_\infty(u)$ mit einer Randbedingung aufzustellen. Wir gehen von Gleichung (3.35) aus, dividieren durch dt_2 und ersetzen $dt_2 = du$

$$\dot{K}_\infty(u) = aK_\infty(u - \tau) - bK_\infty(u). \quad (3.51)$$

Wir beschränken uns zunächst auf das Intervall $u \in [0, \tau]$ und verwenden die Symmetriebedingung (3.30)

$$\dot{K}_\infty(u) = aK_\infty(\tau - u) - bK_\infty(u). \quad (3.52)$$

Diese Funktion wollen wir ein zweites Mal nach u ableiten

$$\begin{aligned} \ddot{K}_\infty(u) &= a\dot{K}_\infty(\tau - u) - b\dot{K}_\infty(u) = -a \frac{d}{d(\tau - u)} K_\infty(\tau - u) - b\dot{K}_\infty(u) \\ &= -a[aK_\infty(\tau - (\tau - u)) + bK_\infty(\tau - u)] - b[aK_\infty(\tau - u) - bK_\infty(u)] \\ &= (b^2 - a^2) K_\infty(u). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nun haben wir eine gewöhnliche DGL

$$\ddot{K}_\infty(u) + \omega^2 K_\infty(u) = 0 \quad (3.54)$$

mit $\omega^2 = a^2 - b^2$ aufgestellt. Die Gleichungen (3.26) und (3.40) geben uns die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} aK_\infty(\tau) - bK_\infty(0) &= D, \\ \dot{K}_\infty(0+) &= -D, \end{aligned} \quad (3.55)$$

um $K_\infty(u)$ eindeutig bestimmen zu können. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist für $\omega \neq 0$

$$K_\infty(u) = C_1 \sin(\omega u) + C_2 \cos(\omega u). \quad (3.56)$$

Die Nebenbedingungen liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} aC_1 \sin(\omega\tau) + aC_2 \cos(\omega\tau) - bC_2 &= D, \\ \omega C_1 &= -D, \end{aligned} \quad (3.57)$$

und die Koeffizienten können bestimmt werden

$$C_1 = -\frac{D}{\omega}, \quad C_2 = D \frac{\frac{a}{\omega} \sin(\omega\tau) + 1}{a \cos(\omega\tau) - b}. \quad (3.58)$$

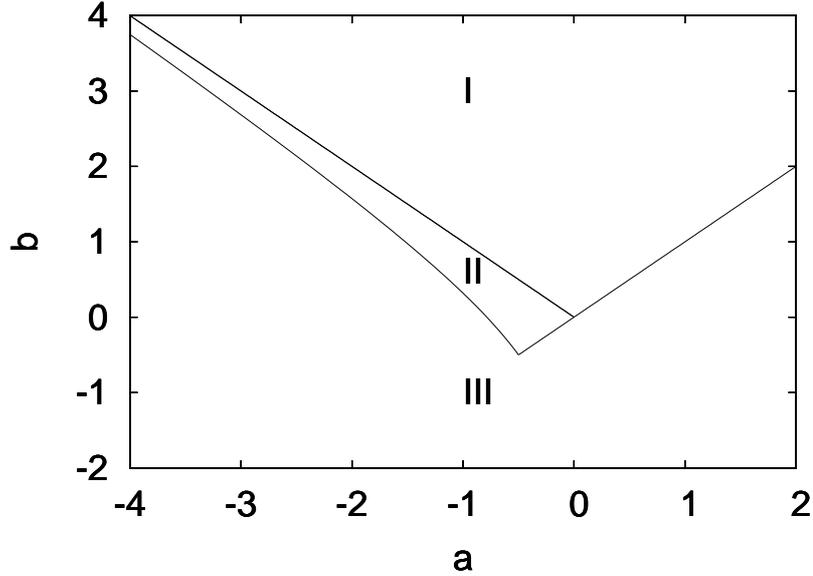


Abbildung 3.3: Das Stabilitätsdiagramm von $K_\infty(u)$ ist identisch mit dem des deterministischen Systems, vergleiche Abb. 2.5. In Bereich I gilt $\omega^2 > 0$, $K_\infty(u)$ wird durch (3.56) beschrieben. In Bereich II gilt $\omega^2 < 0$, $K_\infty(u)$ verhält sich wie (3.59). In Bereich III geht $K_\infty(u)$ gegen unendlich.

Wir müssen bezüglich der Kovarianz im Parameterraum drei Bereiche unterscheiden, siehe Abbildung 3.3. In Bereich I ist $\omega^2 > 0$. Die Kovarianz nimmt die Form (3.56) an. In Bereich II ist $\omega^2 < 0$ und $\omega = i\sqrt{|a^2 - b^2|}$. Die Formel (3.56) kann umgeschrieben werden

$$K_\infty(u) = C_1 \sinh(|\omega|u) + C_2 \cosh(|\omega|u). \quad (3.59)$$

An der Grenze zwischen I und II gilt $b = -a$ und $\omega^2 = 0$. Aus Gleichung (3.54) folgt für die allgemeine Lösung

$$K_\infty(u) = C_1 u + C_2. \quad (3.60)$$

Aus den Nebenbedingungen (3.57) bestimmen wir erneut die Koeffizienten

$$C_1 = -D, C_2 = \frac{aD\tau + D}{2a}. \quad (3.61)$$

In Bereich III ist die Kovarianz unendlich, $x(t)$ erreicht keine stationäre Lösung.

In [YO] wird ein Weg gezeigt, auf diesem Wissen aufbauend, $K(u)$ für $u > \tau$ zu berechnen. Es ist möglich, $t_2 = t_1 + u$ mit $u = \text{const}$ zu wählen. In (3.35) können wir $dt_1 = dt_2 \equiv dt$ setzen und dadurch teilen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} K(t_1, t_1 + u) &= a(K(t_1, t_1 + u - \tau) + K(t_1 - \tau, t_1 + u)) \\ &\quad - 2bK(t_1, t_1 + u) + \langle x(t_1 + u)\xi_{t_1} \rangle. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ erreicht $K(t_1, t_1 + u)$ einen konstanten Wert und es gilt

$$2bK_\infty(u) - a(K_\infty(u - \tau) + K_\infty(u + \tau)) = 2Dx_0(u), \quad (3.63)$$

wobei wir (3.36) eingesetzt haben. Diese Differenzgleichung legt induktiv $K(u)$ für beliebige u fest.

Die Arbeit von [MN95] bietet einen guten Einblick in das Stabilitätsverhalten des ersten Momentes und die jeweiligen Verschiebungen bezüglich des deterministischen Systems. Auch das Stabilitätsgebiet des zweiten Momentes mit additivem Rauschen wird richtig angegeben, der Beweis ist jedoch falsch.

Die Arbeit von [GLL99] bietet mit wenig Kommentaren einen richtigen Zugang zum Problem des zweiten Momentes. Mit diesem Ansatz ist es möglich, die Funktion $K_\infty(u)$ numerisch für beliebige u zu bestimmen.

Ist man an einer Lösung von $K_\infty(u)$ für $u \in [0, \tau]$ interessiert, so bietet der Ansatz von [KM92] den schnellsten Weg.

Die Rechenwege in [MN95] wurden genauer analysiert, da mit dieser Methode nach wenig Rechnung auch eine Bestimmung des zweiten Momentes der Gleichung mit multiplikativem Rauschen möglich wäre. Wegen der Fehler müssen jedoch neue Wege gefunden werden.

Kapitel 4

Stabilität der stochastischen Gleichung bei multiplikativem Rauschen

Bisher haben wir Stabilitätseigenschaften der deterministischen DDGL und der stochastischen DDGL mit additivem Rauschen untersucht. Wir konnten Bedingungen für die Koeffizienten finden, für die verschiedene Fixpunkte marginal stabil sind. Was passiert jedoch, wenn die Koeffizienten nicht mehr deterministisch sind? Bleibt marginale Stabilität erhalten, wenn die Koeffizienten a und b im Mittel übereinstimmen? Diese Fragen motivieren den folgenden Abschnitt.

Gegenüber der DDGL (2.6) möchten wir den Koeffizienten b durch $b + \xi_t$ ersetzen. Wir erhalten eine Differentialgleichung mit Verzögerung und einem multiplikativen Rauschen

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - (b + \xi_t)x(t), \quad x(t) = g(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (4.1)$$

ξ_t bezeichnet wie in Kapitel 3 ein Gaußsches weißes Rauschen.

Allgemein (siehe [Sus78]) kann man zeigen, dass für ein weißes Rauschen die Lösung $x(t)$ von (4.1) mit der Lösung folgender Stratonovich-Differentialgleichung übereinstimmt

$$dx(t) = ax(t - \tau)dt - bx(t)dt - x(t) \circ dW_t. \quad (4.2)$$

W_t ist erneut der Wiener-Prozess.

In diesem Kapitel wollen wir drei Stabilitätskriterien diskutieren. Eine Möglichkeit ist die Berechnung der Stabilität einzelner Trajektorien. Das ist mit dem Sample-Stability-Kriterium möglich. Außerdem bestimmen wir die Stabilität des ersten und zweiten Momentes. Diese Kriterien geben Aussagen über das Verhalten unendlich vieler Trajektorien, indem über alle Realisierungen gemittelt wird.

Wieder betrachten wir mögliche Fixpunkte der Gleichung (4.1), indem wir $\dot{x}(t) = 0$ setzen. $x(t) = 0$ ist der einzige Fixpunkt. Wir möchten herausfinden mit welchen Koeffizienten alle Realisierungen diesen Fixpunkt erreichen.

Für die Gleichung (4.1) erwarten wir folgende Ungleichungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \langle x(t) \rangle \leq \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}. \quad (4.3)$$

Das Verhältnis zwischen erstem und zweitem Moment gilt wegen der Relation

$$\langle (\langle x \rangle - x)^2 \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle x \rangle^2 \leq \langle x^2 \rangle. \quad (4.4)$$

Die erste Ungleichung können wir im folgenden Abschnitt für das unverzögerte System zeigen und vermuten ihre Gültigkeit auch für das verzögerte.

4.1 Sample-Stability-Kriterium des unverzögerten Systems

Definition Der Fixpunkt einer stochastischen Trajektorie ist stabil im Sinne der Sample-Stability, wenn die Trajektorie im Limes $t \rightarrow \infty$ fast sicher, das heißt mit Wahrscheinlichkeit 1, gegen ihn konvergiert.

Dieses Kriterium möchten wir für die unverzögerte Gleichung ($a = 0$) anwenden. Wir betrachten hierfür die Stratonovich-Differentialgleichung

$$dx_t = bx_t dt + x_t \circ dW_t \quad (4.5)$$

mit dem Koeffizienten b . Die formale Lösung lautet

$$x(t) = x_0 e^{bt + W_t} = x_0 e^{(b + \frac{1}{t} \int_0^t ds \xi_s)t}. \quad (4.6)$$

Im Limes $t \rightarrow \infty$ gilt $\frac{1}{t} \int_0^t ds \xi_s = \langle \xi_s \rangle = 0$ fast sicher. Da ξ_s ein ergodischer Prozess ist gilt das Theorem von Oseledec [Ose68]: Das zeitliche Mittel ist gleich dem Scharmittel. Für die Lösung folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 e^{bt + \langle \xi \rangle t}. \quad (4.7)$$

Daraus können wir schließen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ +\infty & \text{für } b > 0 \end{cases} \text{ fast sicher.} \quad (4.8)$$

Für $b < 0$ konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung also gegen eine Deltadistribution

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x) \sim \delta(x). \quad (4.9)$$

Für $b = 0$ fluktuiert $x(t)$ zwischen beliebig großen und kleinen Werten. Man folgert, dass die Stabilität von (4.5) fast sicher nur durch den nichtstochastischen Term bestimmt ist.

Wir möchten ebenso den Mittelwert von (4.6) betrachten und mit (4.7) vergleichen. Wegen der Konvexität der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 e^{bt + \langle \xi \rangle t} \leq \langle x_0 e^{bt + W_t} \rangle = \langle x(t) \rangle \quad (4.10)$$

und somit die Ungleichung (4.4).

Die alleinige Abhängigkeit der Stabilität einer Trajektorie von ihren nichtstochastischen Termen vermuten wir auch für die verzögerte Gleichung mit multiplikativem Rauschen. Das würde bedeuten, dass das Stabilitätsgebiet bezüglich des Sample-Stability-Kriteriums von Gleichung (4.1) dem kegelförmigen Gebiet aus Abbildung 2.5 entspricht.

4.2 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Limes kleiner Verzögerungen

Da Gleichung (4.1) eine DDGL mit variablen Koeffizienten ist, gibt es keine explizite Lösung dieser Gleichung. Wir wollen deswegen die Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 verwenden, um die explizite Lösung der genäherten gewöhnlichen DGL für kleine Verzögerungen zu bestimmen.

In [GLL99] wird diese Methode verwendet, um eine Focker-Planck-Gleichung für eine allgemeine stochastische DDGL aufzustellen. Auf dieser Arbeit aufbauend fasst Frank [Fra05] verschiedene Ansätze zur deren Bestimmung zusammen.

Wir entwickeln den verzögerten Term aus Gleichung (4.1) bis zur ersten Ordnung in τ

$$\dot{x}(t) = a[x(t) - \tau \dot{x}(t)] - (b + \xi_t)x(t). \quad (4.11)$$

Eine Umordnung ergibt

$$\dot{x}(t) = \frac{a-b}{1+\tau}x(t) - \frac{x(t)}{1+\tau}\xi_t, \quad (4.12)$$

und wir können die DGL lösen

$$x(t) = x(0)e^{\frac{1}{1+\tau}((a-b)t - W_t)}. \quad (4.13)$$

Analog zum vorigen Kapitel wenden wir das Sample-Stability-Kriterium an

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } a - b < 0 \\ +\infty & \text{für } a - b > 0 \end{cases} \text{ fast sicher.} \quad (4.14)$$

Für $a - b < 0$ konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung gegen die Deltadistribution. Dieses Ergebnis unterscheidet sich nicht vom unverzögerten Fall ($\tau = 0$). Die Grenze der marginalen Stabilität des Fixpunktes $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ liegt bei $a = b$ und ist eine Gerade im Parameterraum.

Eine kleine Verzögerung hat also keinen Einfluss auf die asymptotischen Eigenschaften des Prozesses $x(t)$. Sie bewirkt jedoch eine Verringerung des Betrages des Exponenten in (4.13) und damit ein langsames Ansteigen bzw. Fallen von $x(t)$.

Die Lösung des ersten Momentes lautet

$$\langle x(t) \rangle = x(0)e^{\frac{a-b}{1+\tau}t + \frac{D}{(1+\tau)^2}t}. \quad (4.15)$$

Deren asymptotisches Verhalten beträgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } a - b + \frac{D}{1+\tau} < 0 \\ +\infty & \text{für } a - b + \frac{D}{1+\tau} > 0 \end{cases}. \quad (4.16)$$

Die Grenze der marginalen Stabilität des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ ist verschoben und liegt bei $b = a + \frac{D}{1+\tau}$.

4.3 Stabilität des ersten Momentes bei multiplikativem Rauschen

Für eine DDGL mit variablen Koeffizienten gibt es keine explizite Lösung. Wir können daher nicht wie in Abschnitt 3.1 aus der Stationarität von ξ_t die Stationarität von $x_t[\xi]$ folgern.

Mit einer zeitabhängigen Verteilung $P(x, t)$ gilt

$$\int \dot{x}(t)P(x, t)dx = \frac{d}{dt}\langle x(t) \rangle - \int x(t)\dot{P}(x, t). \quad (4.17)$$

Das letzte Integral fällt weg, wenn die Verteilung stationär wird, was wir nicht zeigen können.

Es erscheint jedoch möglich, dass es stationäre Verteilungen für Gleichung (4.1) gibt. Wenn $x(t)$ unter geeigneten Bedingungen gegen Null geht, so gehen auch die Momente des stochastischen Prozesses gegen Null. $x(t)$ wird trivialerweise stationär.

Unter dieser Bedingung nehmen wir die Mittelung vor und ziehen die Ableitung nach der Zeit wie vorher heraus

$$\langle \dot{x}(t) \rangle = a\langle x(t - \tau) \rangle - b\langle x(t) \rangle - \langle \xi_t x(t) \rangle. \quad (4.18)$$

Außerdem soll eine Kurzschrift eingeführt werden, mit der Gleichung (4.18) folgendermaßen lautet:

$$\dot{X} = aX_\tau - bX - X^\xi. \quad (4.19)$$

Den Term $X^\xi = \langle \xi_t x(t) \rangle$ kann man nun auf drei Wegen behandeln. Mit der Formel von Shapiro-Loginov [SL78] kann man eine Bewegungsgleichung für X^ξ erhalten. Eine direkte Bestimmung ist mit der Formel von Furutsu-Novikov ([Fur63] und [Nov64]) möglich. Eine dritte Möglichkeit verwendet die statistischen Eigenschaften des Ito-Integrals.

4.3.1 Shapiro-Loginov

Die Formel von Shapiro-Loginov ist eine Bewegungsgleichung für den Term $\langle \eta_t \phi_t[\eta] \rangle$. Allgemein lautet sie

$$\frac{d}{dt}\langle \eta_t \phi_t[\eta] \rangle = -\gamma\langle \eta_t \phi_t[\eta] \rangle + \langle \eta_t \dot{\phi}_t[\eta] \rangle. \quad (4.20)$$

Diese Gleichung gilt für Markov-Prozesse η_t mit exponentiell abfallender Autokorrelation $\langle \eta_t \eta_{t'} \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma(t-t')}$, insbesondere für den dichotomen Markov-Prozess $I(t)$. γ ist die inverse Korrelationszeit, $\phi_t[\eta]$ ein nicht vorwegnehmendes Funktional von η . Im Grenzfall des Gaußschen weißen Rauschens ist diese Formel nicht zu vereinfachen, da in diesem Fall $\gamma \rightarrow \infty$ geht. Deshalb wird zunächst die Rechnung für den symmetrischen dichotomen Markov-Prozess durchgeführt.

Dieser Prozess ist ein buntes Rauschen. Er springt in der Zeit t mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(t, n) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \quad (4.21)$$

n -mal zwischen $-\Delta$ und Δ . α ist die mittlere Anzahl der Sprünge pro Zeiteinheit. Für Mittelwert und Autokorrelation gelten

$$\langle I_t \rangle = 0, \quad \langle I_t I_{t'} \rangle = \Delta^2 e^{-2\alpha(t-t')}. \quad (4.22)$$

Der Grenzübergang zum weißen Rauschen findet am Schluss statt.

In unserem Fall ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\langle I_t x_t \rangle = -\gamma\langle I_t x_t \rangle + \langle I_t \dot{x}_t \rangle = -\gamma\langle I_t x_t \rangle + a\langle I_t x(t - \tau) \rangle - b\langle I_t x_t \rangle - \underbrace{\langle I_t I_t x_t \rangle}_{\Delta^2 \langle x_t \rangle}. \quad (4.23)$$

Da $I_t I_t = \Delta^2$ keine stochastische Größe ist, kann man sie herausziehen. In Kurzschrift lautet die letzte Gleichung

$$\dot{X}^I = -\gamma X^I + aX_\tau^I - bX^I - \Delta^2 X. \quad (4.24)$$

Der Term X^I ist jetzt zwar bestimmt, jedoch in Abhängigkeit eines neuen unbekanntes Terms X_τ^I , der auch mit der Formel von Shapiro-Loginov berechnet werden kann. In diesem erscheinen Terme der Form $\langle I_{t_1} I_{t_2} \phi_t[I] \rangle$. Diese können wir mit dem Theorem von Bourret, Frisch und Pouquet [BFP73] bestimmen

$$\langle I_{t_1} I_{t_2} \phi_t[I] \rangle = \langle I_{t_1} I_{t_2} \rangle \langle \phi_t[I] \rangle, \quad \forall t_1 \geq t_2 \geq t. \quad (4.25)$$

Die Folge ist ein unendlichdimensionales Gleichungssystem, wobei die ersten beiden Gleichungen (4.19) und (4.24) sind

$$\begin{aligned} \dot{X} &= & +aX_\tau & -bX & -X^I, \\ \dot{X}^I &= -\gamma X^I & +aX_\tau^I & -bX^I & -\Delta^2 X, \\ \dot{X}_\tau^I &= -\gamma X_\tau^I & +aX_{2\tau}^I & -bX_\tau^I & -\Delta^2 e^{-\gamma\tau} X_\tau, \\ &\vdots & & & \\ \dot{X}_{N\tau}^I &= -\gamma X_{N\tau}^I & +aX_{(N+1)\tau}^I & -bX_{N\tau}^I & -\Delta^2 e^{-\gamma N\tau} X_{N\tau}, \\ &\vdots & & & \end{aligned} \quad (4.26)$$

Äquivalent ist dazu der Limes $N \rightarrow \infty$ des endlichen Systems

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n \mathbf{X}(t - n\tau), \quad (4.27)$$

$$\text{mit } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^I \\ X_\tau^I \\ \vdots \\ X_{N\tau}^I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta^2 & -(\gamma + b) & a & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -(\gamma + b) \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ -\Delta^2 e^{-\gamma\tau} & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ -\Delta^2 e^{-2\gamma\tau} & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \dots \quad (4.29)$$

Wir führen eine lineare Stabilitätsanalyse um einen Fixpunkt \mathbf{X}_0 durch und setzen in Gleichung (4.27) $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \varepsilon(t)$ mit $\varepsilon(t) = \mathbf{c}e^{st}$ ein. Wir erhalten

$$s\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n e^{-sn\tau} \right) \mathbf{X} = \mathbf{F}'\mathbf{X}. \quad (4.30)$$

Da das System (4.26) linear ist, hängt F' nicht vom Fixpunkt \mathbf{X}_0 ab.

Es lässt sich folgendes ablesen

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} ae^{-s\tau} - b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta^2 & -(\gamma + b) & a & & \vdots \\ \Delta^2 e^{-(\gamma+s)\tau} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a \\ \Delta^2 e^{-(\gamma+s)N\tau} & 0 & \dots & 0 & -(\gamma + b) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Um die Determinante der Matrix $\mathbf{F}' - s\mathbf{I}$ zu berechnen, entwickeln wir nach der ersten Spalte und erhalten einen Ausdruck für das Quasipolynom $h_N(s)$.

$$\begin{aligned} h_N(s) &= \det(\mathbf{F}' - s\mathbf{I}) \\ &= (s + b - ae^{-s\tau})(s + \gamma + b)^{N+1}(-1)^N - \Delta^2 \sum_{n=0}^N a^n e^{-(\gamma+s)n\tau} (s + \gamma + b)^{N-n} (-1)^N \\ &= (s + \gamma + b)^N (-1)^N \left[(s + b - ae^{-s\tau})(s + \gamma + b) - \Delta^2 \sum_{n=0}^N \left(\frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b} \right)^n \right] \\ &= (s + \gamma + b)^N (-1)^N \tilde{h}_N(s). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Von der zweiten zur dritten Zeile wird verwendet, dass $s + \gamma + b \neq 0$ ist. $s = -(\gamma + b)$ ist keine charakteristische Wurzel, da $h_N(-(\gamma + b)) = -\Delta^2 a^N e^{bN\tau} (-1)^N \neq 0$ ist für $a \neq 0$. Der Fall $a = 0$ beschreibt die unverzögerte Gleichung und ist nicht von Interesse. Es genügt deswegen $\tilde{h}_N(s) = 0$ zu betrachten.

Wir untersuchen den Ausdruck $z \equiv \frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b}$ um herauszufinden, ob wir die Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \forall |z| < 1 \quad (4.33)$$

anwenden können. Für $s = \nu + i\omega$ gilt

$$|z|^2 = \left| \frac{ae^{-(\gamma+s)\tau}}{s + \gamma + b} \right|^2 = \frac{a^2 e^{-2(\gamma+\nu)\tau} \overbrace{|e^{-i\omega\tau}|^2}^{=1}}{(\nu + \gamma + b)^2 + \omega^2} \quad (4.34)$$

und für $s = 0$ wird $|z|$ am größten

$$\Rightarrow |z| \leq \left| \frac{ae^{-\gamma\tau}}{\gamma + b} \right|. \quad (4.35)$$

Falls $|\gamma + b| \leq |a|$ ist, so existiert ein hinreichend kleines τ für das $|z| \geq 1$ wird. Für $|\gamma + b| > |a|$ ist also (4.33) immer anwendbar.

$$|\gamma + b| > |a| \Leftrightarrow \gamma > |a| - b \quad \text{oder} \quad \gamma < -|a| - b. \quad (4.36)$$

Da wir an einem Ergebnis für große γ , das heißt kleinen Korrelationszeiten, interessiert sind, ist die rechte Bedingung immer erfüllt.

Wir bestimmen $\tilde{h}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{h}_N(s)$, indem wir (4.33) benutzen

$$\tilde{h}(s) = s + b - ae^{-s\tau} - \frac{\Delta^2}{s + b + \gamma - ae^{-(\gamma+s)\tau}}. \quad (4.37)$$

Nun führen wir den Grenzfall des Gaußschen weißen Rauschens durch

$$\lim_{\Delta^2 \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty, \frac{\Delta^2}{\gamma} = D} \tilde{h}(s) = s + b - ae^{-s\tau} - D = 0. \quad (4.38)$$

Dieses Verfahren wurde in der Diplomarbeit von Micaela Krieger [Kri97] angewandt, vgl. auch [KEB02]. Da es ein Verfahren mit langen Rechnungen und vielen neu eingeführten Notationen ist, untersuchen wir, ob es einen einfacheren Weg gibt.

4.3.2 Furutsu-Novikov

Die Formel von Furutsu-Novikov ([Fur63] und [Nov64]) lautet im Spezialfall eines Gaußschen weißen Rauschens ξ_t

$$\langle \xi_t \phi_t[\xi] \rangle = \int_{-\infty}^t dt' 2D \delta(t - t') \left\langle \frac{\delta \phi_t[\xi]}{\delta \xi_{t'}} \right\rangle = D \left\langle \frac{\delta \phi_t[\xi]}{\delta \xi_t} \right\rangle, \quad (4.39)$$

wobei $\phi_t[\xi]$ ein nicht vorwegnehmendes Funktional von ξ ist. Um $\langle \xi_t x(t) \rangle$ auszurechnen benötigen wir also die Funktionalableitung $\frac{\delta x(t)}{\delta \xi_{t'}}$. Wir schreiben die Differentialgleichung (4.1) in eine Integralgleichung um

$$x_t = x_0 + \int_0^t ds [ax(s - \tau) - (\xi_s + b)x(s)]. \quad (4.40)$$

Funktionale Differentiation ergibt

$$\frac{\delta x_t}{\delta \xi_{t'}} = -x_{t'} - \int_{t'}^t ds [b + \xi_s] \frac{\delta x_s}{\delta \xi_{t'}} + \int_{t'+\tau}^t ds a \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}}, \quad (4.41)$$

denn für $s < t'$ ist $\frac{\delta x_s}{\delta \xi_{t'}} = 0$, bzw. für $s < t' + \tau$ ist $\frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}} = 0$. Nun können wir den Grenzübergang $t' \rightarrow t$ ausführen. Das erste Integral verschwindet, weil die Integrationsgrenzen im Limes übereinstimmen. Das zweite sehen wir uns genauer an:

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_{t'+\tau}^t ds \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_{t'}} = - \int_t^{t+\tau} ds \frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_t}. \quad (4.42)$$

Nur für die obere Grenze $s = t + \tau$ gibt die Funktionalableitung einen Beitrag, der aber im Integral kein Gewicht trägt. Für $s < t + \tau$ ist $s - \tau < t$ und $\frac{\delta x_{s-\tau}}{\delta \xi_t} = 0$. Wir erhalten

$$\frac{\delta x_t}{\delta \xi_t} = -x_t \quad (4.43)$$

und können hiermit $\langle \xi_t x(t) \rangle$ berechnen

$$X^\xi \equiv \langle \xi_t x(t) \rangle = -D \langle x_t \rangle \equiv -DX. \quad (4.44)$$

Gleichung (4.18) lautet nun

$$\dot{X} = aX_\tau - (b - D)X = F(X, X_\tau). \quad (4.45)$$

Durch einen Exponentialansatz erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$h(s) = s + b - D - ae^{-s\tau} = 0. \quad (4.46)$$

Dieses charakteristische Polynom ist das gleiche wie in Formel (4.38). Aus Gleichung (4.45) und der Forderung $F(X_0, X_0) = 0$ können die Fixpunkte abgelesen werden

$$aX_0 - (b - D)X_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_0 = \text{const.} & \text{für } a = b + D \\ X_0 = 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.47)$$

Man erkennt, dass dieses Verfahren eleganter ist als das mittels der Bewegungsgleichung von Shapiro-Loginov.

4.3.3 Verwendung der Eigenschaft des Ito-Integrals

Wir betrachten wieder die Stratonovich-Differentialgleichung (4.2). Wir können diese in eine äquivalente Ito-Differentialgleichung umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} dx_t &= f(x_t, x_{t-\tau})dt + g(x_t) \circ dW_t \\ \Leftrightarrow dx_t &= [f(x_t, x_{t-\tau}) + Dg(x_t)g'(x_t)] dt + g(x_t)dW_t \end{aligned} \quad (4.48)$$

Das Symbol \circ kennzeichnet den Stratonovich-Sinn. Gleichung (4.2) lautet im Ito-Sinn daher

$$dx_t = ax(t - \tau) - (b - D)x(t) - xdW_t. \quad (4.49)$$

Wir mitteln diese DGL und können so die Martingaleigenschaft des Ito-Integrals verwenden. Diese Eigenschaft ist eine Folge aus der Definition des Ito-Integrals

$$\int_0^t x_{t'} dW_{t'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})]. \quad (4.50)$$

Da $x(t)$ ein nichtvorwegnehmendes Funktional von t ist, gilt für den Mittelwert dieses Integrals

$$\left\langle \int_0^t x_{t'} dW_{t'} \right\rangle = \int_0^t x_{t'} \langle \xi_{t'} \rangle dt' = 0. \quad (4.51)$$

Mit $\langle x(t) \rangle = X$ und $x(t - \tau) = X_\tau$ erhalten wir

$$\dot{X} = aX_\tau - (b - D)X. \quad (4.52)$$

Durch den Exponentialansatz $X = e^{st}$ gelangen wir ebenso zu der charakteristischen Gleichung (4.38). Dieses Verfahren wurde in [MN95] verwendet.

4.3.4 Ergebnis des Momentenkriteriums

Jetzt kann man eine neue Variable $b' = b - D$ einführen und das gemittelte stochastische System kann analog dem deterministischen behandelt werden, da

$$h'(s) \equiv s + b' - ae^{-s\tau} = 0 \quad (4.53)$$

die gleiche Form wie Gleichung (2.8) hat. Der Parameterraum (a, b) von vorher entspricht nun dem Parameterraum (a, b') . Mit anderen Worten bedeutet das Hinzufügen

eines multiplikativen Gaußschen weißen Rauschens eine Verschiebung des Stabilitätsgebietes um D nach oben.

Die Bewegungsgleichung des Mittelwertes (4.52) können wir wie in Abschnitt 2.3 lösen

$$\langle x(t) \rangle = x'_0(t)g(0) + a \int_{-\tau}^0 ds x'_0(t-s-\tau)g(s), \quad (4.54)$$

wobei x'_0 die Fundamentallösung mit der neuen Variable $b' = b - D$ ist. In Analogie zu Satz 2.1 gilt die Abschätzung

$$\langle x(t) \rangle \leq K(\alpha')e^{\alpha't}. \quad (4.55)$$

Es ist $\alpha' > \alpha'_0$ beliebig und α'_0 ist der größte Realteil der Lösungen von $h'(s) = 0$.

4.4 Stabilität des zweiten Momentes bei multiplikativem Rauschen

Die Bestimmung des 2. Momentes für die Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - (b + \xi)x(t) \quad (4.56)$$

ist schwieriger.

Da wir für den Prozess $x(t)$, definiert durch die Gleichung (4.56), nicht wie in Abschnitt 3.3 die Stationarität im weiteren Sinne zeigen können, ist nicht klar, ob die Notation $\langle x(t)x(t+u) \rangle \equiv K_\infty(u)$ erlaubt ist. Eine Integraldarstellung durch Fouriertransformation wie in Abschnitt 3.3.1 ist nicht möglich.

In Abschnitt 3.3.2 konnten wir für die DDGL mit additivem Rauschen (3.19) aus ihrer expliziten Lösung einen Ausdruck für die Kovarianz $K_\infty(u)$ finden. Da es für eine DDGL mit variablen Koeffizienten keine explizite Lösung gibt, können wir aus diesem Abschnitt ebenso keine Ergebnisse übernehmen.

Aus der Ungleichung 4.4 können wir folgern

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = \infty$$

Unter der Bedingung $\langle x(t) \rangle \rightarrow 0$ können drei Fälle vorkommen:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = \infty$
- 2) $\langle x^2(t) \rangle$ erreicht eine Konstante
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = 0$

In den nächsten Kapiteln fordern wir daher die Konvergenz des Mittelwertes und analysieren das Verhalten des zweiten Momentes in diesem Parameterbereich.

4.4.1 Aufstellen der Fokker-Planck-Gleichung und Bestimmung der kritischen Verzögerung

Für eine verzögerte Langevingleichung wurde in [GLL99] das erste Mal eine Fokker-Planck-Gleichung (FPG) hergeleitet. Dort wird auch ein Weg vorgeschlagen, wie der Driftkoeffizient näherungsweise bestimmt werden kann. Frank [Fra04] leitet diese FPG ebenso her und berechnet daraus analytische Ergebnisse zur Bestimmung der Stabilität des zweiten Momentes einer stochastischen DDGL mit multiplikativem Rauschen.

Es wird also eine FPG von Gleichung (4.56) gesucht. [Fra04] schlägt vor, aus dem nichtmarkovschen Prozess $x(t)$ einen markovschen zu konstruieren, indem man zusätzliche Variablen einführt. Wir betrachten nun den Vektor

$$\mathbf{X}(z) = (x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - n\tau))^T, \quad (4.57)$$

mit der relativen Zeit

$$z = t - n\tau \text{ für } t \in [n\tau, (n + 1)\tau]. \quad (4.58)$$

Für den Markovprozess $\mathbf{X}(z)$ können wir nun die Bewegungsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(\mathbf{x}, z) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(z)) \rangle = \langle \delta(x(t) - X(t)) \dots \delta(x(t - n\tau) - X(t - n\tau)) \rangle \quad (4.59)$$

aufstellen

$$\frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{x}, z) = \hat{F}(\mathbf{x}, \nabla, z) P(\mathbf{x}, z). \quad (4.60)$$

Hier wurde mit $x_{i\tau} = x(t - i\tau)$ der Operator

$$\hat{F}(\mathbf{x}, \nabla, z) := \sum_{i=0}^n \left[-\frac{\partial}{\partial x_{i\tau}} (ax_{(i+1)\tau} - bx_{i\tau}) + \frac{\partial^2}{\partial x_{i\tau}^2} Dx_{i\tau}^2 \right] \quad (4.61)$$

eingeführt. Für $x_{(n+1)\tau}$ ist die Anfangsfunktion $g(t)$ einzusetzen. Die Zweipunktwahrscheinlichkeit erfüllt die Relation

$$\frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{x}, z; \mathbf{x}', z') = \hat{F}(\mathbf{x}, \nabla, z) P(\mathbf{x}, z; \mathbf{x}', z'). \quad (4.62)$$

Integration von (4.60) und (4.62) nach den Variablen $x_\tau, \dots, x_{n\tau}$ über den ganzen Wertebereich Ω ergibt mit $P(x, z) = \int P(\mathbf{x}, z) dx_\tau \dots dx_{n\tau}$ und $P(x, x_\tau, z) = \int P(\mathbf{x}, z) dx_{2\tau} \dots dx_{n\tau}$

$$\frac{\partial}{\partial z} P(x, z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} dx_\tau [ax(t - \tau) - b'x(t)] P(x, x_\tau, z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dx^2 P(x, z). \quad (4.63)$$

Für die Zweipunktwahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} P(x, z; x', z') &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\Omega} dx_\tau [ax(t - \tau) - b'x(t)] P(x, x_\tau, z; x', z') \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dx^2 P(x, z; x', z'). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Eine Lösung dieser Fokker-Planck-Gleichungen ist nicht möglich, da (4.63) und (4.64) kein geschlossenes Gleichungssystem ist. Es können jedoch bestimmte Erwartungswerte damit berechnet werden.

In [Fra04] wird nun angenommen, dass im stabilen Bereich des Mittelwertes die Verteilungen nach großen Zeiten stationär werden

$$P(x, z) \rightarrow P_{st}(x), \quad P(x, z; x', z') \rightarrow P_{st}(x, z' + u; x', z'). \quad (4.65)$$

$u = z - z' \in [0, \tau)$ ist die Zeitdifferenz. Diese beiden Annahmen erfolgen aufgrund von Untersuchungen numerischer Simulationen, ein analytischer Beweis ist nicht erbracht worden.

Aus der Definition von u folgt $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u}$.

Die beiden Gleichungen multiplizieren wir mit x und integrieren über x . Wir integrieren partiell und erkennen, dass wegen schnell fallender Wahrscheinlichkeitsdichten $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x^k P(x, \dots) = 0$ die Randterme wegfallen. Man erhält man aus (4.63)

$$b'xP_{st}(x) + a \int_{\Omega} dx_{\tau} x_{\tau} P_{st}(x, x_{\tau}) = -\frac{\partial}{\partial x} Dx^2 P_{st}(x). \quad (4.66)$$

Aus (4.64) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} P_{st}(x, z' + u; x', z') \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[b'xP_{st}(x, z' + u; x', z') - a \int_{\Omega} dx_{\tau} x_{\tau} P_{st}(x, x_{\tau}, z' + u; x', z') \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dx^2 P_{st}(x, z' + u; x', z'). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Aus diesen beiden Gleichungen können wir ein geschlossenes Gleichungssystem für folgende Größen finden

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \int_{\Omega} dx x^2(t) P_{st}(x) \equiv K_{\infty}(0) \\ \langle x(t)x(t-\tau) \rangle &= \int \int_{\Omega} dx dx_{\tau} x x_{\tau} P_{st}(x, x_{\tau}) \equiv K_{\infty}(\tau) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Multiplikation von (4.66) mit x und Integration über x ergibt mit $b' = b - D$

$$\begin{aligned} -aK_{\infty}(\tau) + b'K_{\infty}(0) &= DK_{\infty}(0) \\ \Leftrightarrow -aK_{\infty}(\tau) - (b - 2D)K_{\infty}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

(4.67) multiplizieren wir mit xx' und integrieren über beide Variablen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \iint_{\Omega} dx dx' x x' P_{st}(x, z' + u; x', z') = b' \iint_{\Omega} dx dx' x x' \frac{\partial}{\partial x} x P_{st}(x, z' + u; x', z') \\ & - a \iiint_{\Omega} dx dx' dx_{\tau} x x' \frac{\partial}{\partial x} x_{\tau} P_{st}(x, x_{\tau}, z' + u; x', z') \\ & + \iint_{\Omega} dx dx' x x' \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dx^2 P_{st}(x, z' + u; x', z') \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u} K_{\infty}(u) &= -b' \iint_{\Omega} dx dx' x x' P_{st}(x, z' + u; x', z') \\ & + a \iiint_{\Omega} dx dx' dx_{\tau} x' x_{\tau} P_{st}(x, x_{\tau}, z' + u; x', z') \\ & + D \int_{\Omega} dx' x' \underbrace{x^2 P_{st}(x, z' + u; x', z')}_{=0} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Man erhält eine ähnliche Gleichung wie (3.52)

$$\frac{dK_{\infty}(u)}{du} = aK_{\infty}(\tau - u) - b'K_{\infty}(u). \quad (4.71)$$

Wir fordern von $K_\infty(u)$ Stetigkeit auf dem Definitionsbereich. Im Grenzfall $u \rightarrow 0$ setzen wir (4.69) in (4.71) ein

$$\left. \frac{dK_\infty(u)}{du} \right|_{0+} = -b'K_\infty(0) + aK_\infty(\tau) = -DK_\infty(0). \quad (4.72)$$

Diese Gleichung ist der Gleichung (3.55) ähnlich, die wir für die DDGL mit additivem Rauschen hergeleitet haben. In der Tat kann man die Beziehung (3.55) auch über diesen Weg berechnen.

Nun können wir analog zu Abschnitt 3.3.2 $K_\infty(u)$ bestimmen. Die DDGL (4.71) hat die gleiche Form wie (3.52). Wir können sie in eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung umformen

$$\frac{d^2K_\infty(u)}{du^2} + (a^2 - b'^2)K_\infty(u) = 0. \quad (4.73)$$

Diese DGL ist mit den Nebenbedingungen (4.69) und (4.72) eindeutig lösbar. Mit $\omega^2 = a^2 - b'^2$ lautet die allgemeine Lösung

$$K_\infty(u) = C_1 \sin(\omega u) + C_2 \cos(\omega u). \quad (4.74)$$

Es gelten

$$\begin{aligned} K_\infty(0) &= C_2 \\ K_\infty(\tau) &= C_1 \sin(\omega\tau) + C_2 \cos(\omega\tau). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Aus (4.72) erhalten wir

$$\left. \frac{dK_\infty(u)}{du} \right|_{0+} = \omega C_1 = -DK_\infty(0) \Leftrightarrow C_1 = -\frac{D}{\omega} K_\infty(0). \quad (4.76)$$

Einsetzen von (4.75) und (4.76) in (4.69) ergibt die Relation

$$a\frac{D}{\omega}K_\infty(0)\sin(\omega\tau) - aK_\infty(0)\cos(\omega\tau) + (b - 2D)K_\infty(0) = 0. \quad (4.77)$$

Diese Relation ist erfüllt, wenn eine der beiden folgenden Gleichungen erfüllt sind

$$K_\infty(0) = 0, \quad (4.78)$$

$$\cos(\omega\tau) - \frac{D}{\omega} \sin(\omega\tau) = \frac{b - 2D}{a}. \quad (4.79)$$

Wenn ω eine imaginäre Zahl ist, wird aus (4.79)

$$\cosh(|\omega|\tau) - i\frac{D}{|\omega|} \sinh(|\omega|\tau) = \frac{b}{a}. \quad (4.80)$$

Diese Beziehung ist nur erfüllt, wenn der Imaginärteil der linken Seite verschwindet. Das ist der Fall, wenn $\tau = 0$ oder $D = 0$ gilt. Beide Fälle sind nicht von Interesse. In diesem Gebiet ist folglich $K_\infty(0) = 0$ die Lösung von Forderung (4.77).

Wenn ω eine reelle Zahl ist, wollen wir folgende Relation für $A, B, \omega, \tau \in \mathbb{R}$ verwenden

$$A \cos(\omega\tau) + B \sin(\omega\tau) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\omega\tau - \arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right). \quad (4.81)$$

Aus (4.79) wird

$$\sqrt{1 + \frac{D^2}{\omega^2}} \cos \left(\omega\tau + \arctan \left(\frac{D}{\omega} \right) \right) = \frac{b - 2D}{a}. \quad (4.82)$$

Für gegebene Werte von a , b und D ist diese Gleichung eine Bedingung an τ . Wir lösen nach τ auf und erhalten

$$\tau^* = \frac{1}{\omega} \left[\arccos \left(\frac{b - 2D}{a\sqrt{1 + \frac{D^2}{\omega^2}}} \right) - \arctan \left(\frac{D}{\omega} \right) \right]. \quad (4.83)$$

Diese kritische Verzögerung hat eine ähnliche Form wie die aus Gleichung (2.13). Wir stellen fest, dass τ^* und τ_c identisch sind, wenn wir D gegen Null gehen lassen

$$\lim_{D \rightarrow 0} \tau^* = \tau_c. \quad (4.84)$$

In Abschnitt 2.1 zeigen wir, dass mit wachsendem τ ein Übergang zur Instabilität des Fixpunktes $x(t) = 0$ bei $\tau = \tau_c$ stattfindet.

Aufgrund dieser Erkenntnis vermuten wir für das Problem des zweiten Momentes: Mit wachsendem τ wird bei $\tau = \tau^*$ der Fixpunkt $\langle x^2(t) \rangle = 0$ instabil.

Für ein gegebenes τ können wir eine Kurve im Parameterraum (a, b) darstellen, siehe Abbildung 4.1.

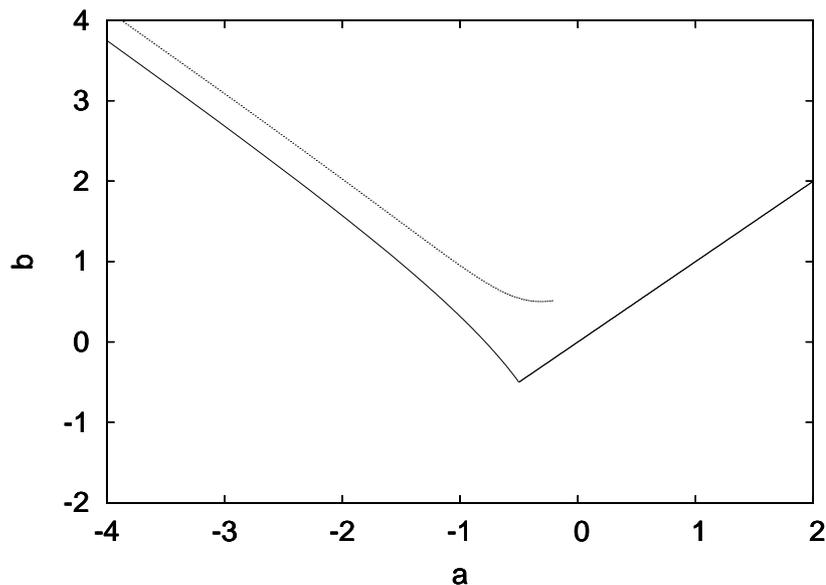


Abbildung 4.1: Wir wählen $D = 0.3$ und plotten die Gleichung $\tau^* = 2$ (gepunktete Linie). Die Linie hört abrupt auf, da für $b - D > a$ der Wert von τ^* imaginär wird. Wir können ihn nicht mehr mit $\tau = 2$ vergleichen. Zum Vergleich stellen wir das Stabilitätsgebiet des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ dar (durchgezogene Linie).

4.4.2 Formulierung einer charakteristischen Gleichung

Lei und Mackey [LM06] bestimmen eine charakteristische Gleichung und erhalten einen expliziten Ausdruck für das zweite Moment. Diese Rechnungen wollen wir ausführen.

Eine implizite Lösung der Ito-DGL von (4.56) lautet

$$x(t) = x'_0(t)g(0) + \int_{-\tau}^0 ds x'_0(t - \tau - s)g(s) - \int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}x(s)dW_s, \quad (4.85)$$

wobei x'_0 wie in Abschnitt 4.3.4 die Fundamentallösung des Mittelwertes ist

$$\langle x(t) \rangle = x'_0(t)g(0) + \int_{-\tau}^0 ds x'_0(t - \tau - s)g(s). \quad (4.86)$$

Wir möchten nun die Varianz $\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle$ für beliebige Werte von (a, b) berechnen. Mit $\tilde{x}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$ schreiben wir

$$\begin{aligned} M(t) \equiv \langle \tilde{x}(t)^2 \rangle &= \langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}x(s)dW_s \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}\tilde{x}(s)dW_s \right)^2 \right\rangle + 2 \left\langle \int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}\tilde{x}(s)\langle x(s) \rangle dW_s \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(\int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}\langle x(s) \rangle dW_s \right)^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (4.87)$$

und können die drei Summanden umformen. Im ersten verwenden wir die Ito-Eigenschaft

$$\left\langle \int_{t_0}^t G(t')dW(t') \int_{t_0}^t H(t')dW(t') \right\rangle = \int_{t_0}^t \langle G(t')H(t') \rangle dt'. \quad (4.88)$$

Der zweite fällt weg, da $\langle \tilde{x}(s)dW_s \rangle = 0$ ergibt. Der dritte Summand lautet

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\int_0^t x'_0(t - s)\sqrt{2D}\langle x(s) \rangle dW_s \right)^2 \right\rangle \\ &= \int_0^t \int_0^t x'_0(t - s)x'_0(t - s')2D\langle x(s) \rangle \langle x(s') \rangle \underbrace{\langle \xi_s \xi_{s'} \rangle}_{\delta(s-s')} ds ds' = 2D \int_0^t ds x'_0(t - s)^2 \langle x(s) \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Nun haben wir einen impliziten Ausdruck für die Varianz gefunden

$$\begin{aligned} M(t) &= 2D \int_0^t ds x'_0(t - s)^2 \langle \tilde{x}^2(s) \rangle + 2D \int_0^t ds x'_0(t - s)^2 \langle x(s) \rangle^2 \\ &= 2D ((x'_0)^2 * M + (x'_0)^2 * \langle x \rangle^2). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Auch hier kann man erkennen, dass die Bedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x(t) \rangle = 0$ notwendig ist für die Beschränktheit des zweiten Momentes. Mittels Laplacetransformation kann man einen Ausdruck für $M(t)$ finden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{M\}(s) &= 2D [\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s)\mathcal{L}\{M\}(s) + \mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s) + \mathcal{L}\{\langle x \rangle^2\}(s)], \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{M\}(s) &= \frac{\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s)\mathcal{L}\{\langle x \rangle^2\}(s)}{1 - 2D\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s)} - 2D} \mathcal{L}\{\langle x \rangle^2\}(s). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Die Laplacetransformierte von $(x'_0)^2$ kann man umschreiben. Da x'_0 die DDGL (2.6) erfüllt, gilt

$$\frac{dx'_0(t)^2}{dt} = 2x'_0(t)\dot{x}'_0(t) = 2ax'_0(t)x'_0(t - \tau) - 2bx'_0(t)^2. \quad (4.92)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} -1 + s\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s) &= 2a\mathcal{L}\{x'_0(t)x'_0(t - \tau)\}(s) - 2b\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s) \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{(s + 2b)\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s) - 2a\mathcal{L}\{x'_0(t)x'_0(t - \tau)\}(s)}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Multiplikation mit $\mathcal{L}\{x_0'^2\}(s)$ ergibt

$$\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s) = \frac{1}{s + 2b - 2af(s)}, \quad (4.94)$$

wobei

$$f(s) = \frac{\mathcal{L}\{x'_0(t)x'_0(t - \tau)\}(s)}{\mathcal{L}\{(x'_0)^2\}(s)} \quad (4.95)$$

eingeführt wurde. (4.94) setzen wir in (4.91) ein

$$\mathcal{L}\{M\}(s) = \frac{1}{s + 2b - 2af(s) - 2D}\mathcal{L}\{\langle x \rangle^2\}(s). \quad (4.96)$$

Wir führen das Funktional

$$Y(t) := \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2b - 2af(s) - 2D}\right\} \quad (4.97)$$

ein, und können aus Gleichung (4.96) einen Ausdruck für das zweite Moment ablesen

$$M(t) = \langle x \rangle^2 * Y = \int_0^t ds \langle x(t-s) \rangle^2 Y(s). \quad (4.98)$$

Da wir die Konvergenz des Mittelwertes fordern, ist das asymptotische Verhalten des zweiten Momentes $M(t)$ abhängig von der Funktion $Y(t)$. Wir formulieren die charakteristische Gleichung

$$H(s) \equiv s + 2b - 2af(s) - 2D = 0. \quad (4.99)$$

In Analogie zu 2.4 definieren wir

$$\beta_0 := \max_n \{Re(s_n) | H(s_n) = 0\}. \quad (4.100)$$

In [LM06] wird gezeigt, dass die Wurzel mit größtem Realteil $\beta_0 < \infty$ ist.

Wie in Satz 2.1 schätzen wir $Y(t)$ ab durch

$$Y(t) \leq K(\beta)e^{\beta t}, \quad (4.101)$$

für ein beliebiges $\beta > \beta_0$.

Das asymptotische Verhalten von $M(t)$ wird demnach durch β_0 bestimmt. Bei der Gleichung mit additivem Rauschen gibt es Bereiche, in denen das zweite Moment einen konstanten Wert erreicht. Bei der Gleichung mit multiplikativem Rauschen ist ein konstanter Wert nur für $\beta_0 = 0$ zu erwarten.

In [LM06] werden verschiedene analytische Abschätzungen für $H(s)$ gemacht, um die Stabilität des zweiten Momentes näherungsweise zu bestimmen. Dies führt jedoch nur zu hinreichenden Bedingungen, so dass die die Stabilitätsgrenze hieraus nicht ermittelt werden kann. Es sollte jedoch möglich sein, die charakteristische Gleichung (4.99) numerisch zu analysieren.

Kapitel 5

Simulation von Differentialgleichungen mit Verzögerung

In diesem Kapitel sollen die deterministische DDGL (2.6), die DDGL mit additivem Rauschen (3.1) und die DDGL mit multiplikativem Rauschen (4.1) simuliert werden. Die Ergebnisse werden dann mit den analytischen Berechnungen verglichen und sollen zugleich als Test dienen.

Wir diskutieren zunächst die einzelnen Terme aus den drei Gleichungen und formulieren jeweils eine Abbildung von x_n nach x_{n+1} . Um die jeweiligen Gleichungen zu simulieren, setzen wir die Iterationsvorschriften später geeignet zusammen.

Die Gleichung $\dot{x}(t) = -bx(t)$ ist der einfachste Teil, $x(t)$ lässt sich nach der Euler-Methode numerisch berechnen

$$x_{n+1} = x_n - bx_n h. \quad (5.1)$$

h ist eine geeignet gewählte Schrittweite.

Als nächstes diskutieren wir den verzögerten Term $\dot{x}(t) = ax(t - \tau)$. Eine gute und einfach anzuwendende Methode, diesen Teil auszuwerten ist die stückweise Integration, die auf Bellman [Bel61] zurückgeht. Man unterteilt dabei die Zeit in Intervalle der Länge τ . Das Zeitintervall $[0, \tau]$ sei durch die Anfangsfunktion bestimmt. Für das Intervall $[\tau, 2\tau]$ löst man die Differentialgleichung folgendermaßen:

$$x(t) - x(\tau) = \int_{x(\tau)}^{x(t)} dx = \int_{\tau}^t dt' \dot{x}(t') = a \int_{\tau}^t dt' x(t' - \tau). \quad (5.2)$$

Für $x(t - \tau)$ kann man nun die Anfangsfunktion einsetzen und eine Stammfunktion ausrechnen. $x(t)$ ist damit für das betreffende Intervall berechnet. Für die folgenden Intervalle $[n\tau, (n+1)\tau]$ geht man analog vor.

Da in unserem Fall ein stochastisches System vorliegt, können wir für den verzögerten Term keinen analytischen Ausdruck einsetzen. Wir müssen wieder schrittweise vorgehen und einzelne vorher ausgerechnete Werte einsetzen. Mit bekanntem $x(t)$ und $x(t - \tau)$ ergibt sich

$$x(t+h) = \int_t^{t+h} dt' \dot{x}(t') = x(t) + \int_t^{t+h} dt' ax(t' - \tau). \quad (5.3)$$

Wir approximieren diesen Ausdruck durch

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h. \quad (5.4)$$

Für die Simulation der Gleichung (3.1) benötigen wir eine Iteration für $\dot{x}(t) = \xi_t$. Die Lösung dieser elementaren stochastischen DGL lautet

$$x(t) - x(0) = W_t - W_0, \quad (5.5)$$

wobei wir $W_0 = 0$ setzen können. Da $\langle (W_{t+h} - W_t)^2 \rangle = h$ gilt, setzen wir für diesen Ausdruck

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{2D}Z\sqrt{h}. \quad (5.6)$$

Hierbei ist Z eine Gaußsche Zufallszahl mit Varianz 1 und Mittelwert 0.

Nun wird das multiplikative Rauschen $\dot{x}(t) = -\xi_t x(t)$ diskutiert. Die beiden äquivalenten Integralgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \text{Stratonovich: } x(t) - x(0) &= -\sqrt{2D} \int_{W_0}^{W_t} x(t') \circ dW_{t'}, \\ \text{Ito: } x(t) - x(0) &= D \int_0^t x(t') dt' - \sqrt{2D} \int_{W_0}^{W_t} x(t') dW_{t'}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wir simulieren die Ito-Gleichung mit dem stochastischen Euler-Verfahren. Der stochastische Driftterm $D \int_0^t x(t') dt'$ muss berücksichtigt werden.

Es wird folgende numerische Integration gewählt

$$x_{n+1} = x_n + Dx_n h - \sqrt{2D}x_n Z\sqrt{h}. \quad (5.8)$$

Die Schrittweite h soll klein genug sein, um genaue Ergebnisse zu erzielen, aber dennoch ein schnelles Berechnen ermöglichen. Für alle Simulationen wurde $h = 10^{-3}$ gewählt.

5.1 Simulation der deterministischen Differentialgleichung mit Verzögerung

In diesem Abschnitt sollen Ergebnisse aus Simulationen der deterministischen DDGL (2.6) vorgestellt werden und Analogien mit den Betrachtungen aus Kapitel 2.1 erläutert werden.

Wir setzen die Iterationsvorschriften der deterministischen Terme aus dem vorigen Abschnitt zusammen

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h - bx_n h. \quad (5.9)$$

Um die Ergebnisse der Simulation mit den analytisch bestimmten vergleichen zu können, wird die Verzögerung auf $\tau = 2$ gesetzt. Zuerst sollen die Grenzen der Stabilität betrachtet werden.

In Abbildung 5.1 werden die Gleichungen (2.23) und (2.34) getestet. Bei marginaler Stabilität ($a = b = 1$) stellt sich ein Wert in Abhängigkeit von der Anfangsfunktion bzw. der Störung ein.

Wie in Abschnitt 2.2 berechnet wurde, ist bei $a = -\frac{\pi}{2\tau}$ und $b = 0$ das System marginal stabil. Nach großen Zeiten oszilliert die Trajektorie bei konstanter Amplitude. Für ein $b > 0$ ($b < 0$) ergibt sich eine abnehmende (zunehmende) Amplitude, siehe Abbildung 5.2.

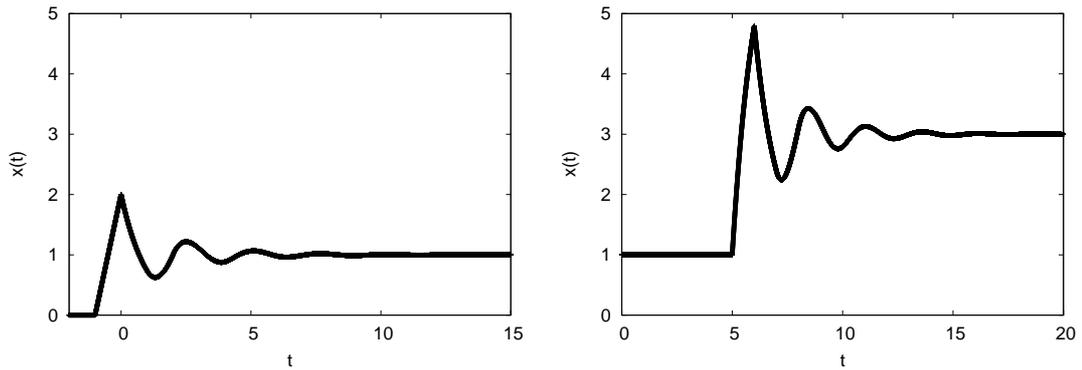


Abbildung 5.1: In diesen Abbildungen gilt $h = 10^{-3}$ und $\tau = 2$. Links wird die Abhängigkeit der konstanten Lösung von der Anfangsfunktion geprüft. Es gilt $g(t) = 0 \forall t \in [-2, -1]$ und $g(t) = 2t + 2 \forall t \in [-1, 0]$. Aus der Abbildung und nach Formel (2.23) stellt sich der Wert $x_0 = 1$ ein. Rechts wird Gleichung (2.34) getestet. Es wurden $x_0 = 1$ und $f(t) = 6 \forall t \in [5, 6]$ gewählt.

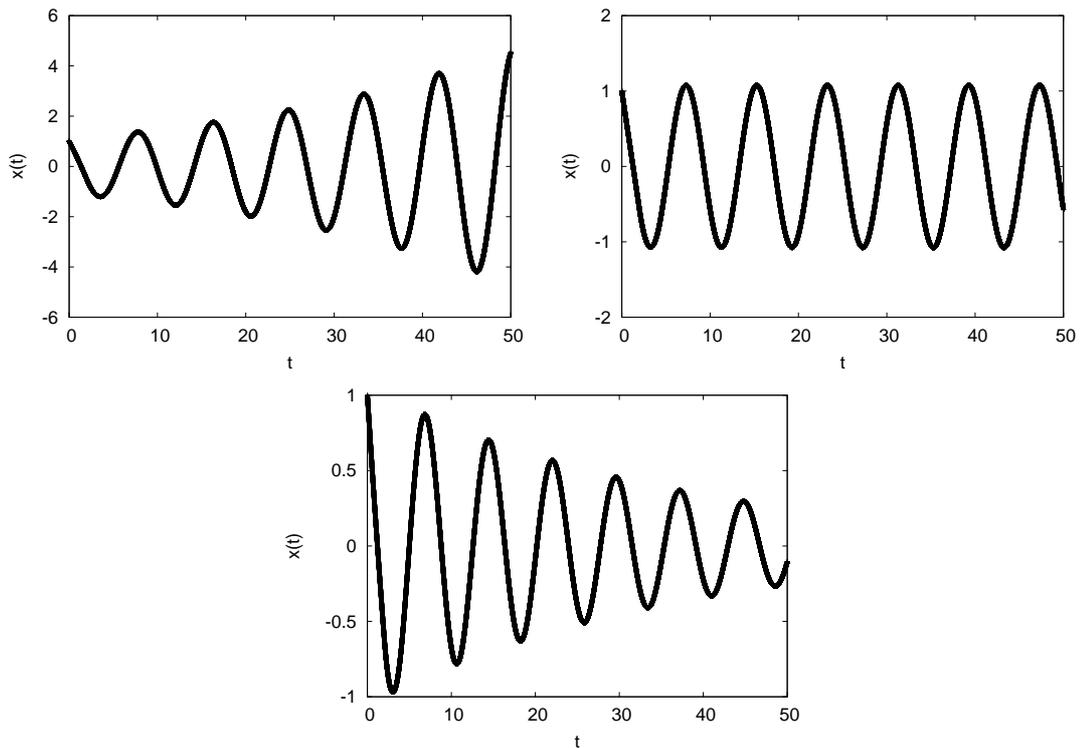


Abbildung 5.2: Es wird $h = 10^{-3}$, $\tau = 2$ und $g(t) = 1$ gewählt. Überall setzen wir $a = -\frac{\pi}{2\tau}$ und beobachten mit wachsendem b einen Stabilitätswechsel. Links oben gibt es eine oszillatorische Lösung mit steigender Amplitude, ($b = -0.1$). Rechts oben gilt $b = 0$, wir befinden uns genau auf der Schwelle der marginalen Stabilität. Rechts unten wählen wir $b = 0.1$, die Amplitude wird kleiner.

Aus Abschnitt 2.1 wissen wir, dass bei $a = b > -\frac{1}{\tau}$ ebenso ein Stabilitätswechsel stattfindet. Diesen möchten wir in Abbildung 5.3 darstellen.

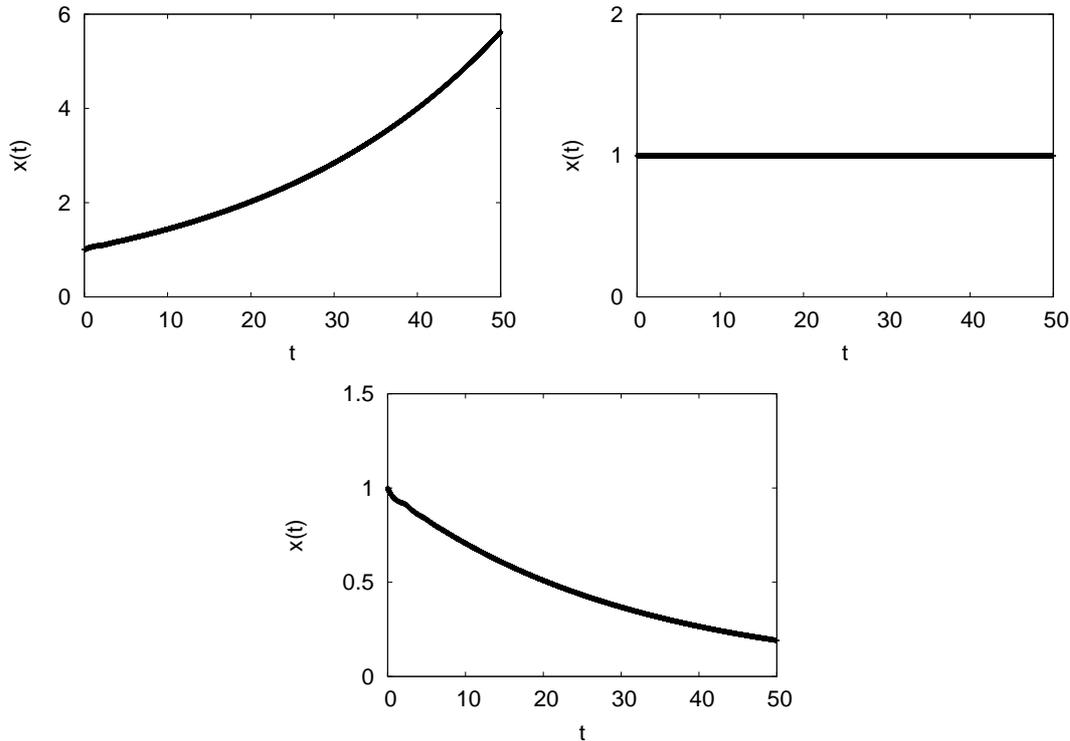


Abbildung 5.3: Es wird $h = 10^{-3}$, $\tau = 2$ und $g(t) = 1$ gewählt. Wir lassen $a = 1$ konstant und erkennen mit steigendem b einen Stabilitätswechsel. Links oben wächst $x(t)$, ($b = -0.1$). Rechts oben gilt $b = 1$, es ergibt sich die konstante Lösung. Unten wählen wir $b = 1.1$.

Um ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum numerisch zu bestimmen, muss ein Kriterium entwickelt werden, wann eine berechnete Trajektorie zum Parameterpaar (a, b) als stabil oder instabil zu interpretieren ist. Wir wählen eine geeignete Simulationsdauer T und eine Schwelle x_{th} . Wenn in der Zeit T die Werte x_{th} oder $-x_{th}$ überschritten werden, wird die Simulation abgebrochen und die Trajektorie als instabil interpretiert.

In den Abschnitten 4.3 und 4.1 wurden Stabilitätskriterien unabhängig von der Wahl der Anfangsfunktion bestimmt. Für die Simulation können wir jedoch keine beliebige Funktion $g(t)$ nehmen. Sie muss in Abhängigkeit von x_{th} gewählt werden, da in endlichen Zeiten instabile Trajektorien sie erreichen müssen.

Man erhält ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum, siehe Abbildung 5.4, welches das analytisch bestimmte aus Abbildung 2.5 reproduziert.

5.2 Simulation der Differentialgleichung mit Verzögerung und additivem Rauschen

Wir erweitern die numerische Integration aus (5.9) um ein additives Rauschen

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h - bx_nh + \sqrt{2DZ}\sqrt{h}. \quad (5.10)$$

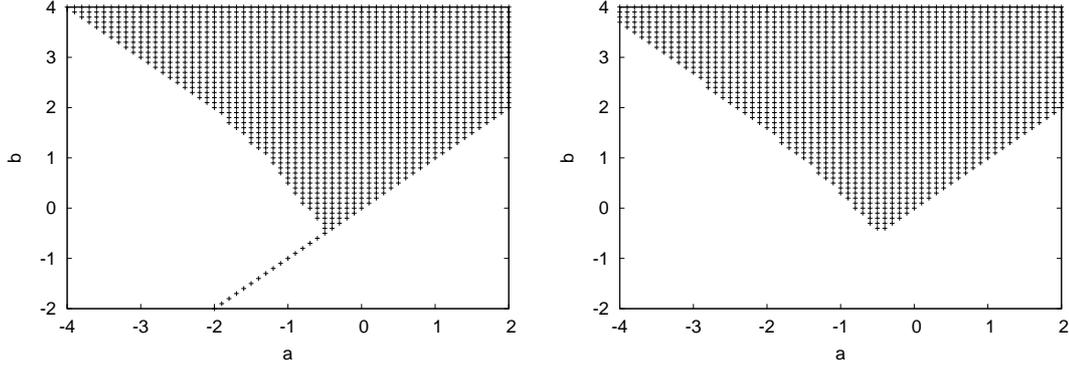


Abbildung 5.4: Für jedes Paar (a, b) des deterministischen Systems (2.6) wird eine Simulation durchgeführt. Es werden $T = 200$, $x_{th} = 10$ und $\tau = 2$ gewählt. Bei einem stabilen Ereignis wird ein Punkt gesetzt. Links wird bei konstanter Anfangsfunktion $g(t) = 1$ die gepunktete Linie aus Abbildung 2.5 reproduziert. Für diesen Spezialfall gilt die konstante Lösung auch im instabilen Bereich. Instabilität kann nicht festgestellt werden. Rechts wird für eine nicht konstante Anfangsfunktion $g(t) = t \forall t \in [-\tau, 0]$ die Stabilität gemäß Definition (2.1) reproduziert.

Bei den Simulationen wollen wir zunächst das Rauschen klein im Vergleich zur Größenordnung der Koeffizienten (a, b) halten. Da wir in allen Simulationen die Koeffizienten in den Intervallen $a \in [-4, 2]$ bzw. $b \in [-2, 4]$ variieren, wählen wir $D = 0.1$. Wenn mit diesem Wert analytische Ergebnisse bestätigt werden, verwenden wir größere Werte von D .

Es soll getestet werden, ob ein numerisch bestimmtes Stabilitätsgebiet der Gleichung (3.1) mit dem analytisch bestimmten aus Abschnitt 3.2 übereinstimmt, siehe Abbildung 5.5.

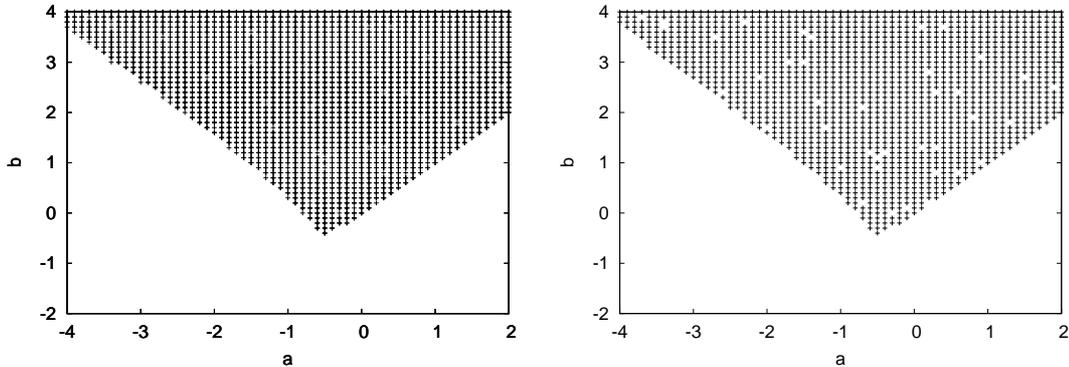


Abbildung 5.5: Wiederum werden $h = 10^{-3}$, $\tau = 2$ und $g(t) = 1$ gewählt. Links wird mit $D = 0.1$ in der Zeit $T = 200$ überprüft, ob die Schwelle $x_{th} = 10$ überschritten wird. Für ein stabiles Ereignis wird ein Punkt gesetzt. Da dieses Gebiet mit dem analytisch bestimmten aus Abbildung 5.4 übereinstimmt, wird rechts ein größeres Rauschen getestet, $D = 1$. Mit $T = 1000$ und $x_{th} = 100$ ist auch hier das Stabilitätsgebiet erkennbar.

Aus Abschnitt 3.1 wissen wir, dass im stabilen Gebiet des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ nach großen Zeiten sich eine stationäre, gaußsche Verteilung einstellt. Diese Aussage

möchten wir überprüfen, indem wir eine nach verschiedenen Zeiten numerisch bestimmte Verteilung mit der entsprechenden Gaußkurve vergleichen.

Wir betrachten zunächst den Fall $a = 1$, $b = 2$ und $D = 0.1$. In Abschnitt 3.1 haben wir gezeigt, dass die Gaußkurve den Mittelwert Null und die Varianz $2D \int_0^\infty x_0^2(s) ds$ hat. Diesen Ausdruck möchten wir nähern. Wir integrieren über die ersten Intervalle, da diese den größten Beitrag haben.

$$\begin{aligned}
2D \left[\int_0^\infty x_0^2(s) ds \right] &\approx 2D \left[\int_0^\tau ds e^{-2bs} + \int_\tau^{2\tau} ds \left(e^{-bs} + a(s-2)e^{-b(s-\tau)} \right)^2 \right. \\
&+ \int_{2\tau}^{3\tau} ds \left(e^{-bs} + a(s-2)e^{-b(s-\tau)} + \frac{a^2}{2}(s-2\tau)^2 e^{-b(s-2\tau)} \right)^2 \\
&+ \int_{2\tau}^{3\tau} ds \left(e^{-bs} + a(s-2)e^{-b(s-\tau)} + \frac{a^2}{2}(s-2\tau)^2 e^{-b(s-2\tau)} + \frac{a^3}{6}(s-3\tau)^3 e^{-b(s-3\tau)} \right)^2 \\
&+ \dots \left. \right].
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Mit $D = 0.1$, $a = 1$, $b = 2$ und $\tau = 2$ erhält man als Näherung für die Varianz

$$2D \left[\int_0^\infty x_0^2(s) ds \right] \approx 0.0584. \tag{5.12}$$

Die zugehörige Gaußfunktion lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.0584}} e^{-\frac{x^2}{2 \times 0.0584}}. \tag{5.13}$$

Eine numerische Verteilung bestimmen wir, indem wir die Ereignisse zählen, die in das Intervall $x(t) + \Delta x$ fallen. Insgesamt lassen wir 10^5 Realisierungen berechnen und wählen $\Delta x = \frac{1}{100}$.

Für das Intervall $[0, 0.01]$ erwarten wir

$$10^5 \int_0^{0.01} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.0584}} e^{-\frac{x^2}{2 \times 0.0584}} \approx 1650 \tag{5.14}$$

Ereignisse. Das Maximum der Gaußkurve soll deshalb bei $(0, 1650)$ liegen. In Abbildung 5.6 werden numerische und analytische Ergebnisse verglichen.

Aus Gleichung (5.11) möchten wir auch die Varianz für den Fall $a = -1$, $b = 2$ und $D = 0.1$ nähern

$$2D \left[\int_0^\infty x_0^2(s) ds \right] \approx 0.0581. \tag{5.15}$$

Die Gaußfunktion hat also die Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.0581}} e^{-\frac{x^2}{2 \times 0.0581}}. \tag{5.16}$$

Für das Intervall $[0, 0.01]$ erwarten wir nun

$$10^5 \int_0^{0.01} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.0581}} e^{-\frac{x^2}{2 \times 0.0581}} \approx 1645 \tag{5.17}$$

Ereignisse und legen das Maximum der Kurve auf $(0, 1645)$. In Abbildung 5.7 werden die Ergebnisse dargestellt.

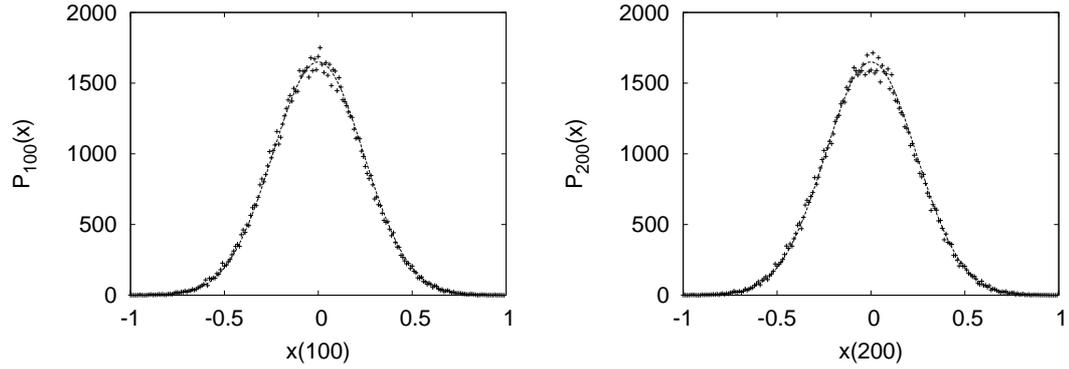


Abbildung 5.6: Hier werden für den Fall $a = 1$, $b = 2$ und $D = 0.1$ numerische und analytische Verteilungen verglichen. Im linken Bild sind nach 100 Zeitschritten die Ereignisse im Intervall $x + \Delta x$ gezählt worden. Rechts wird nach 200 Zeitschritten abgebrochen. Die Verteilung ist stationär und gaußsch. Die gestrichelte Linie zeigt jeweils die Gaußkurve (5.13).

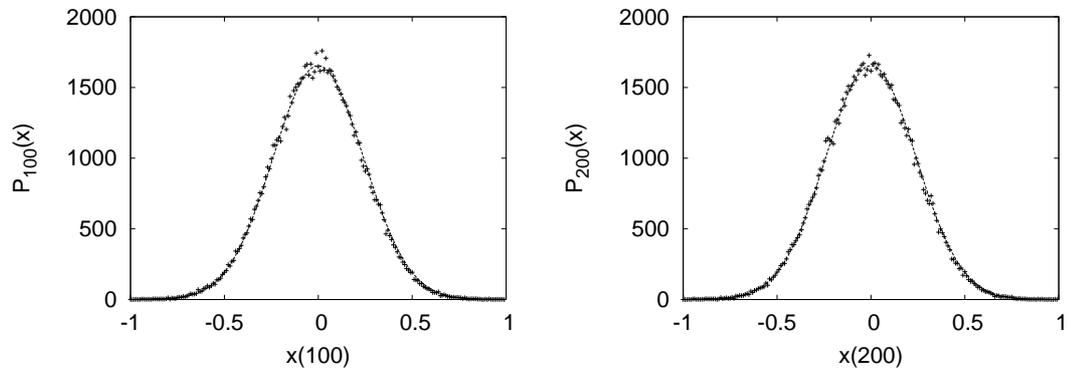


Abbildung 5.7: Hier werden $a = -1$, $b = 2$ und $D = 0.1$ gewählt. Im linken Bild sind nach 100 Zeitschritten die Ereignisse im Intervall $x + \Delta x$ gezählt worden. Rechts wird nach 200 Zeitschritten abgebrochen. Die Verteilung ist stationär und gaußsch. Die gestrichelte Linie zeigt jeweils die Gaußkurve (5.16).

5.3 Simulation der Differentialgleichung mit Verzögerung und multiplikativem Rauschen

Aus Abschnitt 5 können wir die Iterationsvorschrift für Gleichung (4.1) zusammensetzen

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h - bx_nh + Dx_nh - \sqrt{2D}x_nZ\sqrt{h}. \quad (5.18)$$

Ein Ziel dieses Abschnittes ist eine numerische Bestimmung der Grenze der marginalen Stabilität der Fixpunkte $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\langle x(t) \rangle = 0$ und $\langle x^2(t) \rangle = 0$ und der Vergleich mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.

5.3.1 Simulationen im Falle kleiner Verzögerungen

In Abschnitt 4.2 konnten wir erkennen, dass sich die asymptotischen Eigenschaften der Lösung (4.13) nicht vom unverzögerten System mit $\tau = 0$ unterscheiden. Um dieses

Ergebnis numerisch zu testen, betrachten wir die Lösung des Mittelwertes (4.15) im Fall $a = b$

$$\langle x(t) \rangle = x(0) e^{\frac{D}{(1+\tau)^2} t}. \quad (5.19)$$

Wir bilden den Logarithmus und erhalten

$$\ln(\langle x(t) \rangle) = \ln(x(0)) + \underbrace{\frac{D}{(1+\tau)^2}}_{:=m_{theo}(\tau)} t. \quad (5.20)$$

Es wird der Logarithmus von $\langle x(t) \rangle$ aus Gleichung (4.1) bestimmt und in Abbildung 5.8 dargestellt. Die Steigung der Geraden ist m_{sim} . Um die beiden Steigungen m_{theo} und

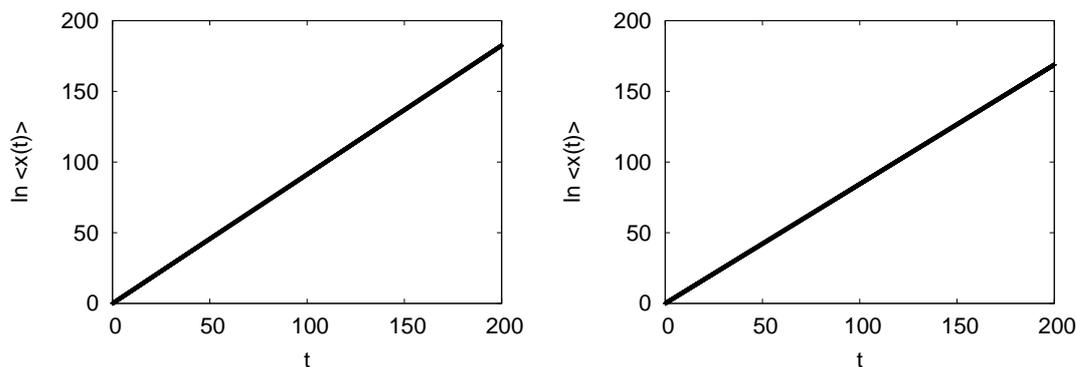


Abbildung 5.8: Es wird Gleichung (4.1) mit $a = b = 1$, $D = 1$ simuliert. Der Mittelwert $\langle x(t) \rangle$ wird über 500 Realisierungen ermittelt. Links ist $\tau = 0.1$, die Steigung der Geraden beträgt $m_{sim} = 0.912$. Rechts ist $\tau = 0.2$ gewählt worden. Wir erhalten $m_{sim} = 0.844$.

m_{sim} vergleichen zu können, werden sie in Abbildung 5.9 in einem Koordinatensystem gegenübergestellt.

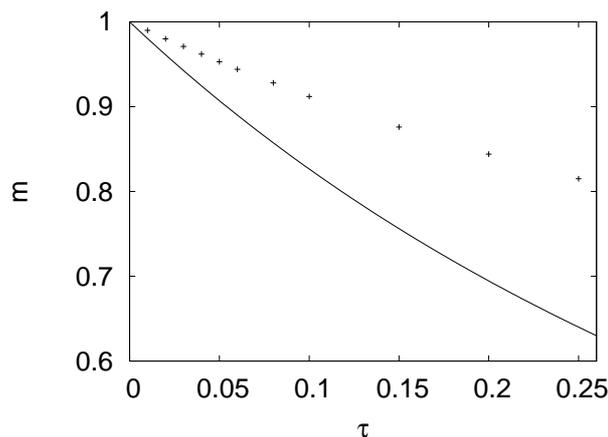


Abbildung 5.9: Die durchgezogene Linie stellt die Funktion $m_{theo}(\tau)$ dar, die einzelnen Punkte sind die gemessenen Steigungen m_{sim} für verschiedene τ . Man erkennt, dass m_{theo} nur für kleine τ eine gute Näherung bedeutet.

5.3.2 Simulationen zum Sample-Stability-Kriterium

Zunächst wollen wir einzelne Trajektorien betrachten, um die Stabilitätsgrenzen des Sample-Stability-Kriteriums abzuschätzen.

Wir müssen beachten, dass es nahe der marginalen Stabilität Bereiche gibt, in denen die Trajektorie gegen Null geht, ihre Fluktuationen aber groß werden, so dass es schwierig wird, das Langzeitverhalten einer Trajektorie zu erkennen, siehe Abbildung 5.10.

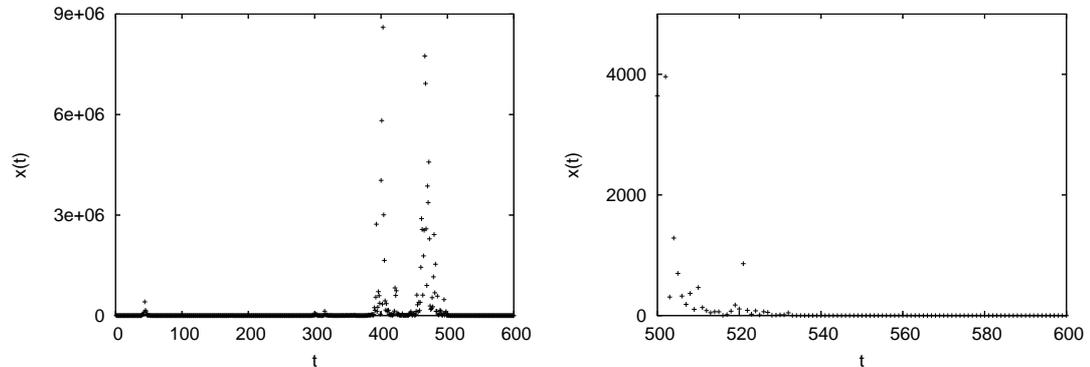


Abbildung 5.10: Hier wird Gleichung (4.1) mit $a = 0.1$, $b = 0.3$, $D = 1$ und $\tau = 2$ simuliert. Man erkennt bei $400 \leq t \leq 500$ große Fluktuationen. Der vergrößerte Ausschnitt auf der rechten Seite zeigt, dass die Trajektorie für größere Zeiten gegen Null geht.

Damit wir nicht wie in Abbildung 5.10 die interessanten Bereiche vergrößern müssen, führen wir eine logarithmische Skala ein. Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen Vergleiche zwischen beiden Darstellungen. Mit der logarithmischen Skala lässt sich einfacher die Stabilität nach großen Zeiten abschätzen.

Es sollen Stabilitätsübergänge bei konstantem a und variablem b dargestellt werden, siehe Abbildungen 5.13 und 5.14. Durch Simulationen über größere Zeiträume kann sehr genau ein kritischer Wert für b gefunden werden.

Die kritischen Werte b_{krit} , die wir diesen Abbildungen bei konstantem a entnehmen, unterscheiden sich von denen des deterministischen Systems.

	deterministisches System	stochastisches System	
$a = 1$	$b_{krit} = 1$	$b_{krit} \approx 1.19$	(5.21)
$a = -2$	$b_{krit} = 1.571$	$b_{krit} \approx 1.835$	

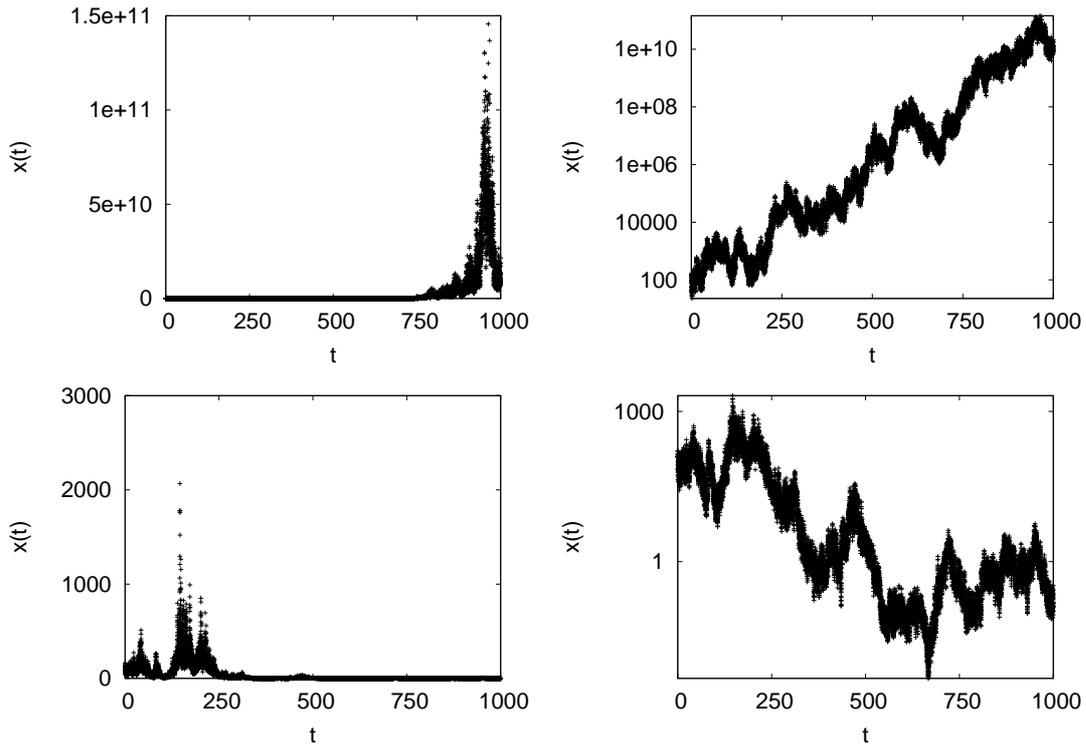


Abbildung 5.11: Hier wird Gleichung (4.1) mit $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert. Oben wird $a = 1$ und $b = 1.15$ gewählt. Unten gilt $a = 1$ und $b = 1.2$. Es wird jeweils eine gewöhnliche und eine logarithmische Skala verwendet. Die logarithmischen Darstellungen auf der rechten Seite geben mehr Auskunft über das Langzeitverhalten von $x(t)$: Die obere Trajektorie divergiert, die untere konvergiert gegen Null.

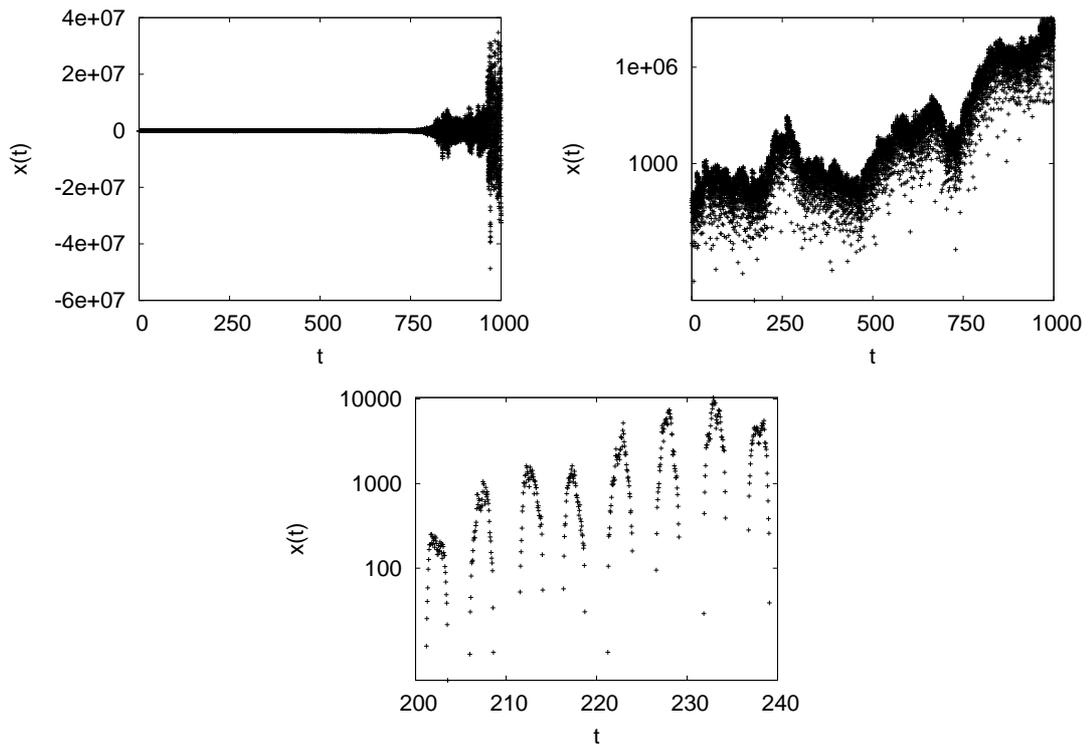


Abbildung 5.12: Hier wird Gleichung (4.1) mit $a = -2$, $b = 1.8$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert. Links oben wird die ganze Trajektorie auf gewöhnlicher, rechts oben auf einer logarithmischen Skala dargestellt. Man beachte, dass eine logarithmische Skala nur positive Werte von $x(t)$ darstellen kann. An der unteren Abbildung, die ein Ausschnitt des logarithmischen Plots ist, kann man erkennen, dass die meisten Werte nahe den Spitzen der Oszillationen auftreten. Ein logarithmischer Plot der ganzen Trajektorie erlaubt somit eine Abschätzung der einhüllenden Kurve der oszillatorischen Lösungen.

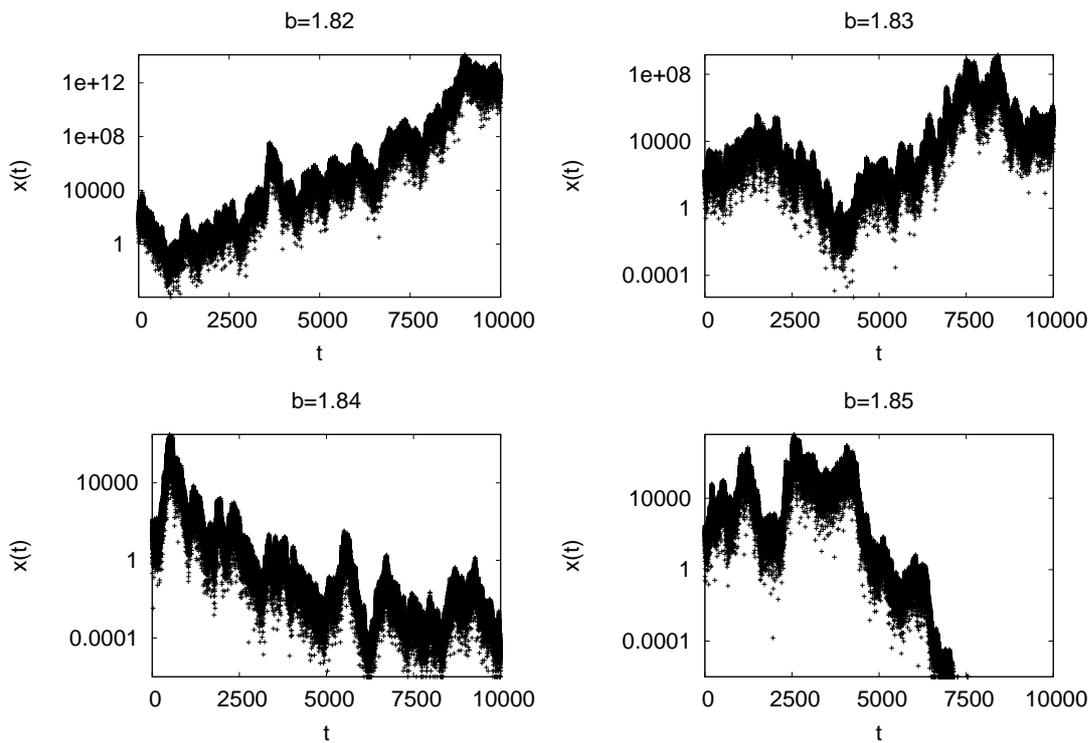


Abbildung 5.13: Hier wird Gleichung (4.1) mit $a = -2$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert und in eine logarithmische Skala geplottet. Wir variieren b in Schritten von 0.01 und vermuten für den kritischen Wert $1.83 < b_{krit} < 1.84$.

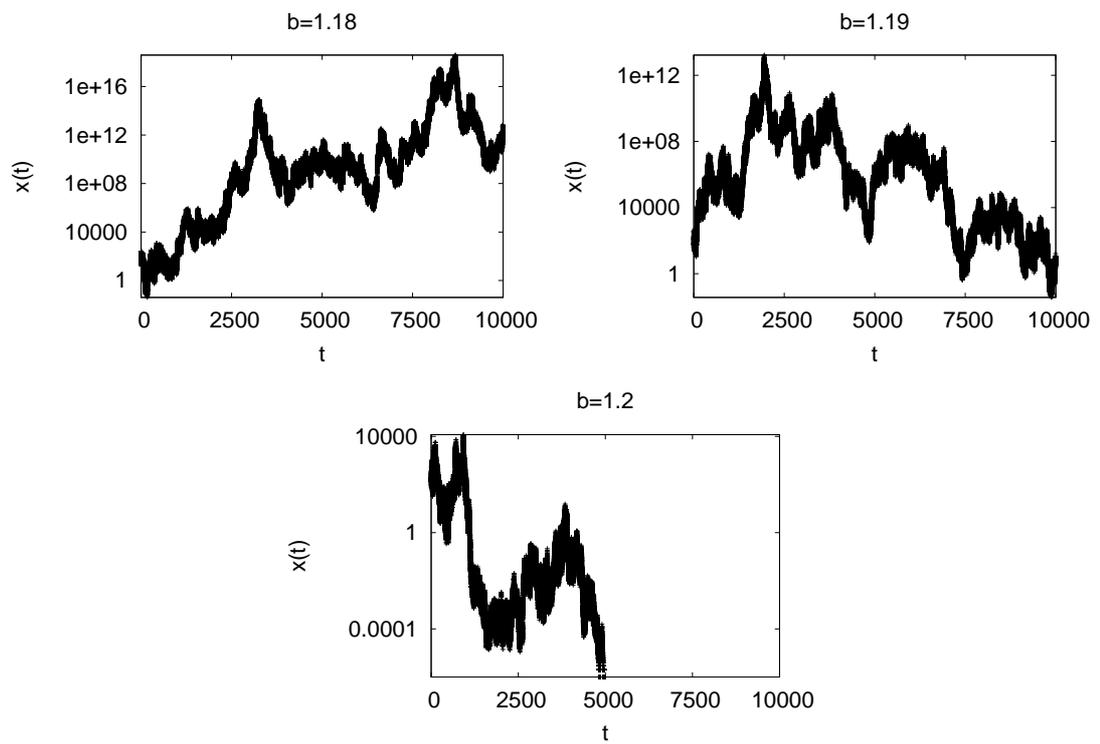


Abbildung 5.14: Hier wird Gleichung (4.1) mit $a = 1$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert und in eine logarithmische Skala geplottet. Den kritischen Wert erwarten wir bei $b_{krit} \approx 1.19$.

Die Analyse, die wir in den beiden Darstellungen 5.13 und 5.14 durchgeführt haben, soll von einem Computerprogramm übernommen werden. Um stabile von instabilen Trajektorien zu unterscheiden und ein Stabilitätsgebiet gemäß des Sample-Stability-Kriteriums zu konstruieren, soll nun überprüft werden, ob nach langer Zeit eine niedrige Schwelle unterschritten wird. Da auch instabile oszillatorische Lösungen eine Schwelle unterschreiten, soll diese Schwelle eine bestimmte Zeit lang unterschritten werden. Diese Zeit muss größer sein als eine Periode der Oszillationen.

Die Abbildungen 5.15 zeigen die Ergebnisse für verschiedene Werte von D . Um den Unterschied zum deterministischen System zu veranschaulichen, wird dessen Stabilitätsgebiet in den gleichen Abbildungen dargestellt.

In Abschnitt 4.1 wurde für das unverzögerte System ($a = 0$) der kritische Parameter $b_{krit} = 0$ bestimmt. Daher wissen wir, dass das Wertepaar $a = b = 0$ ein kritischer Punkt sein muss. Die Abbildungen 5.15 bestätigen diese Aussage.

Die Stabilitätsgebiete des deterministischen Systems und des stochastischen Systems bezüglich des Sample-Stability-Kriteriums sind offenbar verschieden. Das steht im Widerspruch zu der Vermutung aus Abschnitt 4.1: Die Stabilität einer Trajektorie hängt nur von ihren nichtstochastischen Termen ab.

Offenbar werden marginal stabile Trajektorien durch Hinzufügen eines multiplikativen Rauschens destabilisiert.

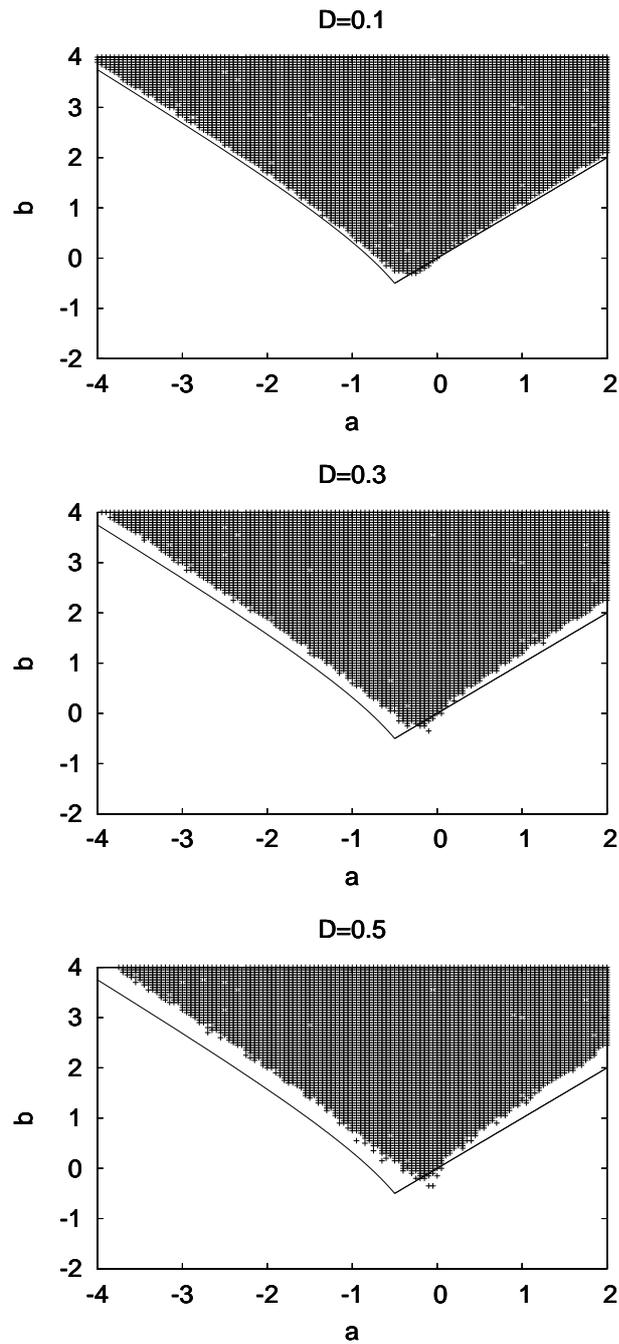


Abbildung 5.15: Für jedes Parameterpaar (a, b) wird eine Trajektorie der Gleichung (4.1) mit $\tau = 2$ und dem entsprechenden D bis $T = 1000$ simuliert. Die Anfangsfunktion beträgt $g(t) = 100 \forall t \in [-\tau, 0]$. Wenn die Trajektorie auf ihrem Weg die untere Schwelle $x_{Schw} = 1$ über 10 Zeitschritte hinweg unterschreitet, so wird sie als stabil interpretiert. Die Simulation wird abgebrochen und es wird ein Kreuz gesetzt. Die durchgezogene Linie zeigt zum Vergleich das Stabilitätsgebiet des deterministischen Systems.

5.3.3 Simulationen zum Momentenkriterium

Es soll ein Programm geschrieben werden, das die zeitliche Entwicklung des Mittelwertes und der Varianz bestimmt, um die Stabilitätsgrenzen der Fixpunkte $\langle x(t) \rangle = 0$ und $\langle x^2(t) \rangle = 0$ abschätzen zu können. Die Ergebnisse werden in den Abbildungen 5.16 und 5.17 dargestellt. In diesen Abbildungen können die Stabilitätswechsel, wie in den Abschnitten 4.3 und 4.4 dargestellt, getestet werden.

Man kann erkennen, dass die kritischen Punkte für die ersten beiden Momente auch für den unverzögerten Fall ($a \neq 0$) verschieden sind. Es gibt Trajektorien, deren erstes Moment konvergiert, während das zweite divergiert.

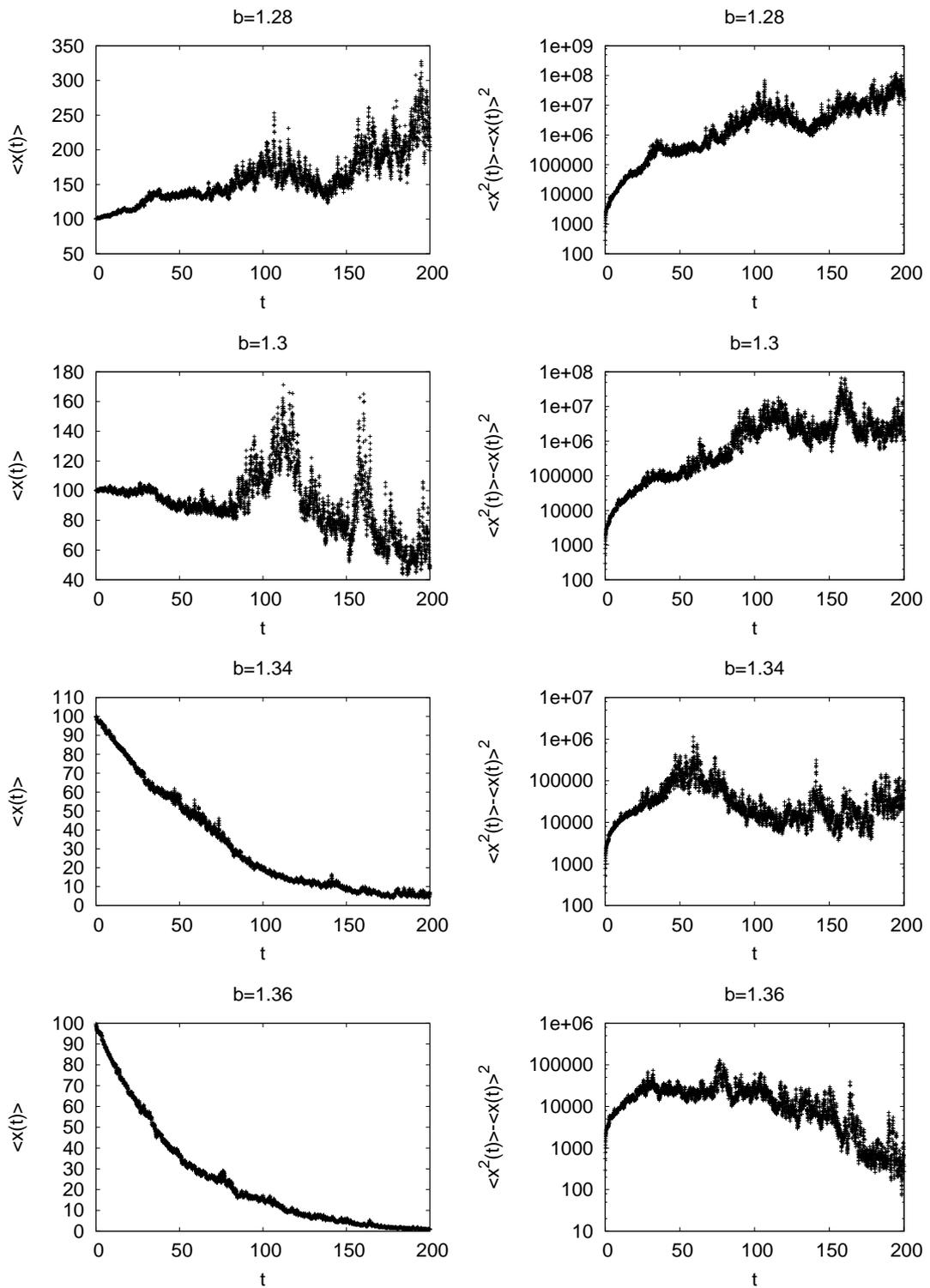


Abbildung 5.16: Die Gleichung (4.1) wird mit $a = 1$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert. Die Anfangsfunktion beträgt $g(t) = 100 \forall t \in [-\tau, 0]$. Der Mittelwert und die Varianz werden über der Zeit aufgetragen. Es wird über 5000 Realisierungen gemittelt. Da die Varianz stark fluktuiert, wird erneut eine logarithmische Darstellung gewählt.

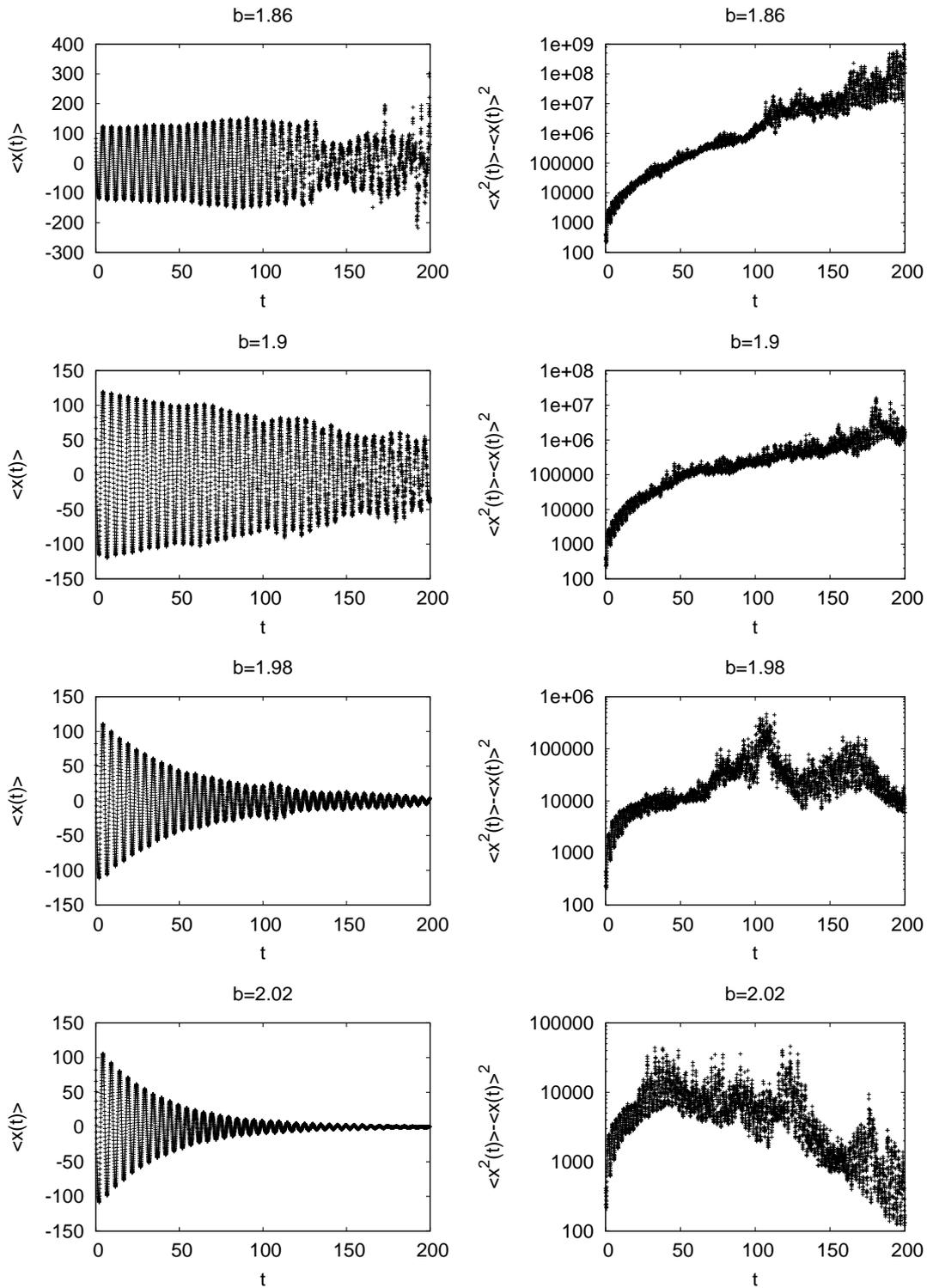


Abbildung 5.17: Die Gleichung (4.1) wird mit $a = -2$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert. Die Anfangsfunktion beträgt $g(t) = 100 \forall t \in [-\tau, 0]$. Wir tragen Mittelwert und Varianz über der Zeit auf. Es wird über 5000 Realisierungen gemittelt. Da die Varianz stark fluktuiert, wird erneut eine logarithmische Darstellung gewählt.

Kapitel 6

Die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit von Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung mit Verzögerung

In Kapitel 3 haben wir die Eigenschaften der Prozesse diskutiert, die durch die DDGL mit additivem und mit multiplikativem Rauschen definiert worden sind. Bei einigen Realisierungen kann man Nulldurchgänge des Prozesses beobachten. Da der Prozess $x(t)$ abhängig von der Zufallsvariablen ξ_t ist, sind die Intervalle zwischen zwei Nulldurchgängen ebenso Zufallsgrößen.

Für verschiedene stochastische Prozesse sind die Verteilungen der ersten Wiederkehrzeiten berechnet worden. Für zeitdiskrete Prozesse werden in [HPH94] und in [DY95] die Verteilungen für eine breite Klasse von treibenden Prozessen bestimmt.

Lim und Muniandy [LM02] berechnen für verschiedene Arten von Brownschen Bewegungen die Verteilung der ersten Passagezeit. Dort werden Unterschiede in den Verteilungen zwischen normaler und anomaler Diffusion hervorgehoben.

In der Diplomarbeit von Micaela Krieger [Kri97] wurde eine Differentialgleichung mit zeitlicher Verzögerung und einem additiven dichotomen Markovprozess bei marginaler Stabilität des Mittelwertes $\langle x(t) \rangle = 0$ bezüglich ihrer ersten Wiederkehrzeit diskutiert.

In diesen Arbeiten konnte jeweils ein Zusammenhang zwischen einem kritischen Zustand und einem Potenzgesetz in der Verteilung hergestellt werden

$$P_{EWZ}(T) \sim T^{-\frac{3}{2}}. \quad (6.1)$$

In diesem Kapitel soll die Frage diskutiert werden, ob ein Potenzgesetz auch für die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit von Lösungen einer stochastischen DDGL gilt, die durch ein additives Gaußsches weißes Rauschen angetrieben wird.

6.1 Numerische Bestimmung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit

Es soll die Verteilung der Wiederkehrzeiten von Lösungen der Gleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau) - bx(t) + \xi_t \quad (6.2)$$

numerisch bestimmt werden.

Wir verwenden dieselbe Iterationsvorschrift wie aus Kapitel 5

$$x_{n+1} = x_n + ax_{n-\frac{\tau}{h}}h - bx_nh + \sqrt{2DZ}\sqrt{h}. \quad (6.3)$$

Es sollen nur nichtoszillierende Trajektorien bezüglich der ersten Wiederkehrzeit betrachtet werden, da die Wiederkehrzeit oszillierender Lösungen durch ihre Periode beeinflusst wird.

Die Verteilung der Wiederkehrzeiten soll zunächst im stabilen Bereich des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ gemessen werden. In Abbildung 6.1 wird eine Verteilung für diesen Fall im doppellogarithmischen Plot dargestellt. In diesem Graphen fitten wir gleichzeitig

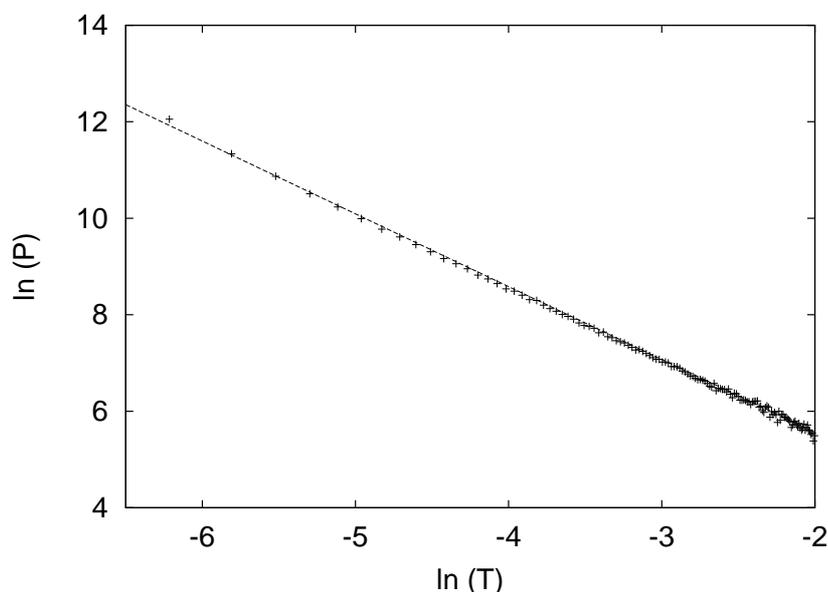


Abbildung 6.1: Hier wird die Gleichung (6.2) mit $a = 1$, $b = 2$, $\tau = 2$ und $D = 1$ über 10^5 Zeitschritte simuliert. Erneut wird der Logarithmus der Häufigkeiten P über dem Logarithmus der gemessenen Wiederkehrzeiten T aufgetragen.

die Gerade $f(T) = \beta T + c$. Die ermittelte Steigung lautet

$$\beta = -1.5083 \pm 0.0046. \quad (6.4)$$

Nun wird die Gleichung (6.2) bei marginaler Stabilität des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ betrachtet. Für diesen Fall wird in Abbildung 6.2 der Logarithmus der Häufigkeiten P über dem Logarithmus der gemessenen Wiederkehrzeiten T aufgetragen. Man erkennt, dass für große Werte von $\ln(T)$ der Logarithmus der Häufigkeiten schwankt, da in diesem Bereich weniger Wiederkehrzeiten gemessen werden. Für kleine $\ln(T)$ ist im doppellogarithmischen Plot dagegen eine Gerade zu erkennen.

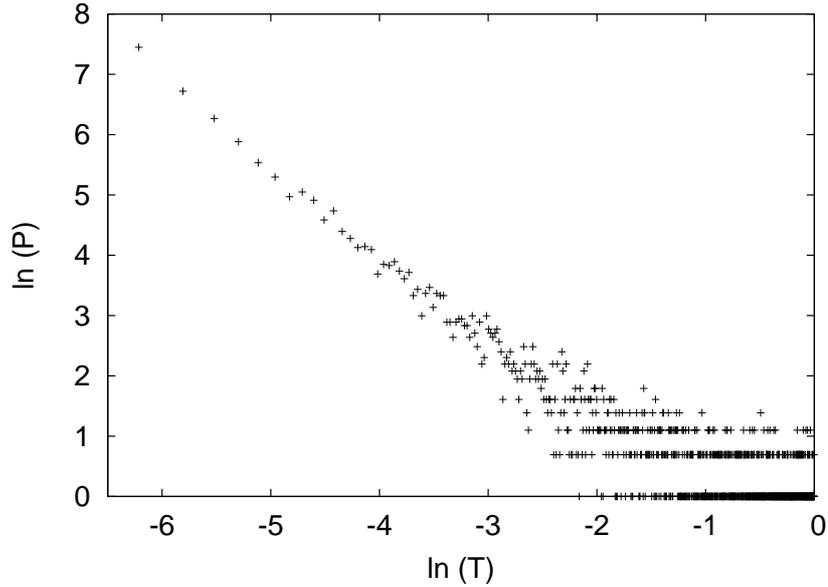


Abbildung 6.2: Die Gleichung (3.1) wird über 10^5 Zeitschritte mit $a = b = 1$, $\tau = 2$ und $D = 1$ simuliert. Der Logarithmus der Häufigkeiten P wird über dem Logarithmus der gemessenen Wiederkehrzeiten T aufgetragen.

Durch eine geeignete Vergrößerung der Intervalle für große Wiederkehrzeiten kann man eine schärfere Messung erhalten, da damit mehr Ereignisse pro Intervall gezählt werden. Wir fassen jeweils λ_i Bins der Länge ΔT zusammen, so dass P_i Ereignisse in einem Intervall $[T, T + \lambda_i \Delta T]$ gezählt werden. Die P_i sollen möglichst konstant sein. Auf das Intervall ΔT fallen somit $\frac{P_i}{\lambda_i}$ Ereignisse. Diesen Wert tragen wir über den zeitlichen Mittelwert $T + \frac{\lambda_i}{2} \Delta T$ auf. Wir ersetzen also mehrere Punkte durch ihre Mittelwerte

$$\begin{aligned}
 T_1 \dots T_k &\rightarrow \bar{T} := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k T_j \\
 P(T_1) \dots P(T_k) &\rightarrow \bar{P} := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P(T_j).
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Das Problem bei diesem Verfahren ist, dass wir für $P(T)$ eine Exponentialfunktion bzw. ein Potenzgesetz mit negativem Exponenten erwarten und wegen ihrer Konvexität die Ungleichung $P(\bar{T}) < \overline{P(T)}$ gilt. Für große λ_i werden die Werte \bar{P} zu groß.

Aus diesem Grund mitteln wir für die Darstellung im doppellogarithmischen Plot über die logarithmischen Werte

$$\begin{aligned}
 \ln(T_1) \dots \ln(T_k) &\rightarrow \ln(\bar{T}) := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(T_j), \\
 \ln(P(T_1)) \dots \ln(P(T_k)) &\rightarrow \ln(\bar{P}) := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(P(T_j)).
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Damit erhalten wir im logarithmischen Plot eine schärfere Verteilung, siehe Abbildung 6.3.

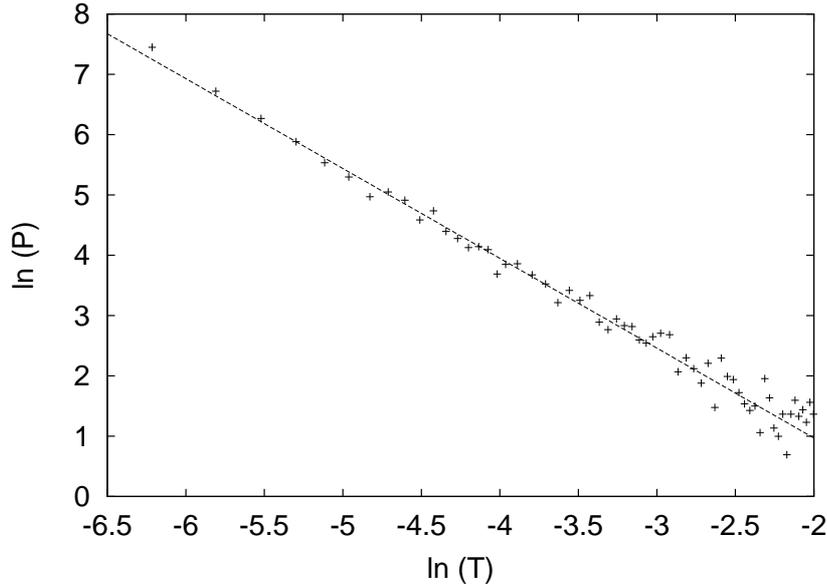


Abbildung 6.3: In Abbildung 6.2 wird die Gerade ungefähr bei $\ln(T) > -4$ unscharf. Ab diesem Wert fassen wir Bins zusammen, wie in (6.6) beschrieben. Für $-4 > \ln(T) > -3$ mitteln wir jeweils über 2 Ergebnisse, für $-3 > \ln(T) > -2$ mitteln wir über 3 Ergebnisse. Die gestrichelte Linie ist ein linearer Fit durch alle Punkte.

Wir fitten eine Gerade durch die Punkte von Abbildung 6.3 und erhalten die Steigung

$$\beta = -1.4894 \pm 0.0259. \quad (6.7)$$

Für den Fall instabiler Lösungen ist die Bestimmung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit nicht möglich, da die Trajektorien divergieren.

6.2 Analytische Bestimmung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit

Wir betrachten erneut die DDGL mit additivem Rauschen (6.2).

Um die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten von erster Passage-, sowie erster Wiederkehrzeit zu bestimmen, benötigen wir die Verteilung

$$P(x, t | x(0) = 0). \quad (6.8)$$

Wieder wollen wir zunächst den stabilen Bereich des Fixpunktes $\langle x(t) \rangle = 0$ betrachten. Aus Abschnitt 3.1 wissen wir, dass der Prozess nach großen Zeiten stationär im weiteren Sinne ist und die Autokorrelation $\langle x(t+u)x(t) \rangle$ eine Funktion von u ist.

Nach Amann et al. [ASJ06] kann die Lösung von (3.1) formal als unendliche Summe von Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen (OUP) dargestellt werden kann. Die Verteilung der Übergangswahrscheinlichkeiten eines OUP unter der Bedingung $x(0) = 0$ lautet

$$P(x, t | x(0) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1 - e^{-2\gamma t})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\gamma t})}}, \quad (6.9)$$

wobei σ^2 die Varianz und γ die inverse Korrelationszeit des Prozesses sind. Aufgrund dieser Erkenntnis vermuten wir, dass (6.9) die gesuchte Verteilung mit $\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle$ ist. γ wird durch die Autokorrelationsfunktion des OUP $\langle x(t+u)x(t) \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma u}$ definiert.

Um die Verteilung der Wiederkehrzeit für den stationären Fall, d.h. im stabilen Bereich $b > a$, zu bestimmen, wollen wir die Gleichung (6.9) für die weiteren Rechnungen verwenden. Da dieser Ausdruck jedoch kompliziert ist, soll untersucht werden, ob dieser vereinfacht werden kann.

Für kleine Werte von γt kann in (6.9) die Entwicklung

$$e^{-2\gamma t} = 1 - 2\gamma t + O((\gamma t)^2) \quad (6.10)$$

vorgenommen werden.

Wir wollen herausfinden, unter welchen Umständen der Parameter γ klein wird. Wenn man im Parameterraum (a, b) die Stabilitätsgrenze $a = b$ betrachtet, dann kann man das Verhalten von γ genauer bestimmen. Dazu wollen wir unter der Bedingung $a = b > -\frac{1}{\tau}$, Varianz und Autokorrelationsfunktion für Gleichung (3.1) ausrechnen. Mit der Relation (3.29) erhält man

$$\langle x(t+u)x(t) \rangle = 2D \int_0^t ds x_0(s+|u|)x_0(s). \quad (6.11)$$

Um die zeitliche Entwicklung der Autokorrelation zu veranschaulichen, müssen wir den Verlauf der Fundamentallösung für den Fall $a = b$ kennen, siehe Abbildung 6.4.

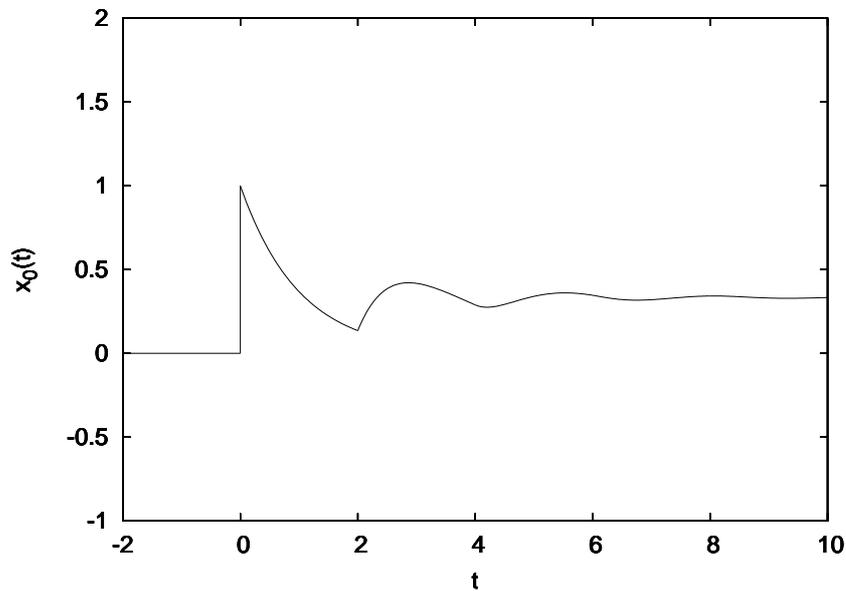


Abbildung 6.4: Das ist die Fundamentallösung (2.36) für den Fall $a = b = 1$ und $\tau = 2$.

An der Abbildung 6.4 kann man erkennen, dass bereits nach wenigen Intervallen der Länge τ die Fundamentallösung gegen den konstanten Wert $x_\infty = \frac{1}{1+a\tau}$ geht. Den Wert x_∞ kann man aus der Formel (2.23) durch Einsetzen der Anfangsfunktion (2.35) ablesen.

Das Integral aus Gleichung (6.11) spalten wir bei t' auf. Zur Zeit t' soll die Fundamentallösung bereits die konstante Lösung eingenommen haben

$$\begin{aligned}
\langle x(t+u)x(t) \rangle &= 2D \int_0^t x_0(s+u)x_0(s)ds \\
&= 2D \underbrace{\int_0^{t'} x_0(s+u)x_0(s)ds}_{=\langle x(t'+u)x(t') \rangle} + 2D \underbrace{\int_{t'}^t x_0(s+u)x_0(s)ds}_{= \left(\frac{1}{1+a\tau}\right)^2} \\
&= \langle x(t'+u)x(t') \rangle + 2D \left(\frac{1}{1+a\tau}\right)^2 (t-t').
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Das zweite Moment besitzt ein ähnliches Verhalten

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2(t') \rangle + 2D \left(\frac{1}{1+a\tau}\right)^2 (t-t'). \tag{6.13}$$

An der Stabilitätsgrenze nimmt $\langle x^2(t) \rangle$ linear mit t zu. Für den stabilen Fall erreichen zweites Moment und Autokorrelation eine Konstante, siehe Kapitel 3. Für den instabilen Fall steigen sie schneller als linear an.

Aus (6.12) erkennt man, dass bei marginaler Stabilität die Autokorrelation nicht mehr abhängig von der Zeitdifferenz u ist. Zu fester Zeit t gelten $\langle x(t)x(t+u) \rangle = const$ und damit $\gamma = 0$. Die Korrelationszeit τ_{kor} muss unendlich sein.

Wenn wir uns der Grenze der Stabilität nähern, muss deswegen $\gamma \rightarrow 0$ gelten und die Entwicklung (6.10) ist sinnvoll.

Diese wollen wir in Gleichung (6.9) einsetzen, da Varianz und inverse Korrelationszeit konstant sind, ersetzen wir ihr Produkt durch $\sigma^2\gamma = C$

$$P(x, t|x(0) = 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi C\gamma t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{2C\gamma t}}, \tag{6.14}$$

Somit haben wir das Problem auf die Bestimmung der ersten Wiederkehrzeit, bzw. der ersten Passagezeit des Wiener-Prozesses zurückgeführt. Diese Aussage wird bekräftigt durch eine Vermutung aus [AB05]: Die statistischen Eigenschaften der Nulldurchgänge von Gleichung (6.2) sind mit denen der Brownschen Bewegung identisch.

Die Verteilung der ersten Passagezeit kann nun mit der ermittelten Wahrscheinlichkeitsdichte (6.14) bestimmt werden, siehe [LM02] und [Mar03]

$$P_{EPZ}(T) = \frac{d}{dT} P(T_a < T) = \frac{d}{dT} 2P(x(T) > a|x(0) = 0) = \frac{d}{dT} \frac{2}{\sqrt{2\pi CT}} \int_a^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2CT}}, \tag{6.15}$$

wobei a die Schwelle ist, die überschritten wird und T_a die Zeit ist, bei der die Passage stattfindet. Mit der Substitution $s = \frac{a^2 T}{x^2}$, d.h. $dx = -\frac{dsx^3}{2a^2 T}$ erhalten wir

$$P_{EPZ}(T) = \frac{d}{dT} \int_0^T ds \frac{as^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi C}} e^{-\frac{a^2}{2Cs}} = \frac{aT^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi C}} e^{-\frac{a^2}{2CT}}. \tag{6.16}$$

In Abbildung 6.5 wird diese Verteilung dargestellt. Für große Zeiten ist das Potenzgesetz $P_{EPZ}(T) \sim T^{-\frac{3}{2}}$ zu erkennen. Für kleine Zeiten gilt

$$\lim_{T \rightarrow 0} P_{EPZ}(T) = 0. \tag{6.17}$$

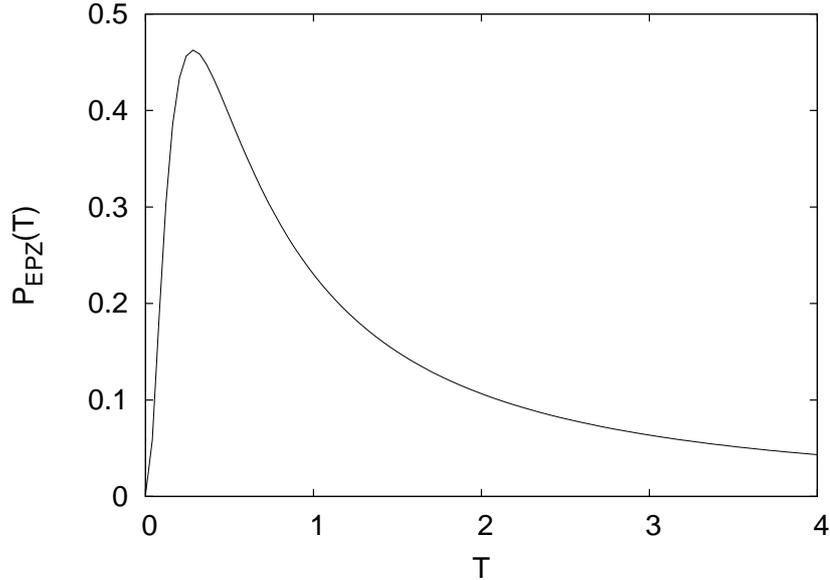


Abbildung 6.5: Das ist die gesuchte Verteilung für die erste Passagezeit, siehe Gleichung (6.16). Die Konstanten wählen wir $a = C = 1$.

Das ist sinnvoll, da $x(t)$ eine gewisse Zeit braucht, um das Niveau a zu erreichen.

Für die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit $P_{EWZ}(T)$ einer Brownschen Bewegung mit der Verteilung (6.14) gibt es eine Berechnung in [BBACT02]. Dort wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, ob nach diskreten Zeitschritten t_i die Trajektorie sich in einem kleinen Intervall um die Null ($-\varepsilon \leq x(t_i) \leq \varepsilon$) befindet. Sie erhalten für große t_i das Ergebnis

$$P_{EWZ}(t_i) \sim \frac{\sqrt{C}}{\varepsilon} t_i^{-\frac{3}{2}}. \quad (6.18)$$

Wir wollen die Frage etwas anders formulieren: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x(t)$ die Schwelle $x = 0$ im Zeitintervall $[T, dT]$ überschreitet?

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass $x = 0$ zur Zeit T überschritten wird, können wir aus (6.14) ableiten

$$P(T) := \frac{1}{\sqrt{2\pi CT}}. \quad (6.19)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte ist noch nicht normierbar und es gilt im Gegensatz zu (6.17)

$$\lim_{T \rightarrow 0} P(T) = \infty. \quad (6.20)$$

Auch für die Verteilung der ersten Wiederkehrzeit $P_{EWZ}(T)$ ist ein ähnliches Verhalten für kleine T zu erwarten. Das Problem soll in Abbildung 6.6 skizziert werden.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass die Lösung dieses Prozesses nach der Zeit T unter der Bedingung $x(0) = 0$ das erste Mal wieder zu Null zurückkehrt, ist

$$P_{EWZ}(T) = P(x(T) = 0 | x(0) = 0; x(s) > 0 \vee x(s) < 0) \forall 0 < s < T. \quad (6.21)$$

$P_{EWZ}(T)dT$ ist damit die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Wiederkehrzeit in das Intervall $[T, T + dT]$ fällt.

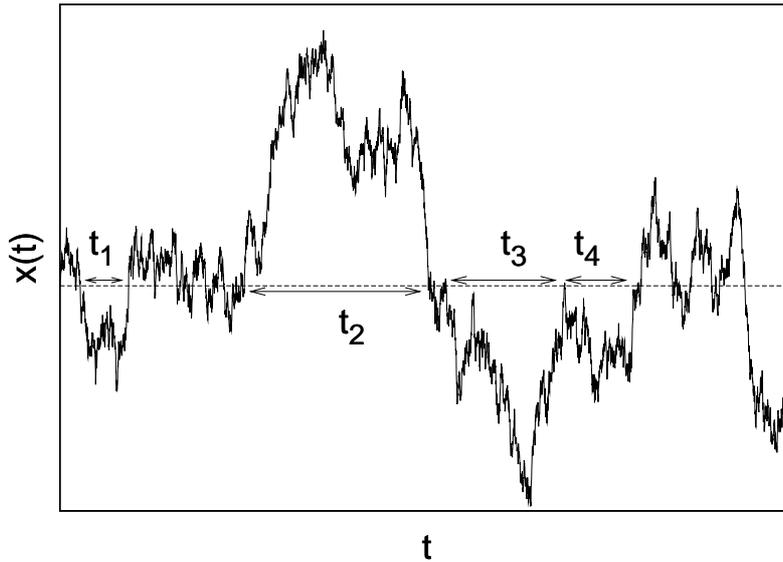


Abbildung 6.6: Hier wurde Gleichung (3.1) mit $a = b = 1$, $\tau = 2$ und $D = 0.3$ simuliert. t_1 bis t_4 sind gemessene Wiederkehrzeiten dieses Prozesses auf einer gewissen Skala. Man beachte, dass es viele kürzere Wiederkehrzeiten gibt. Um eine Verteilung numerisch zu bestimmen, müssen die Häufigkeiten der gemessenen Wiederkehrzeiten T über T aufgetragen werden.

An der Abbildung 6.6 kann man erkennen, dass auch sehr kleine Wiederkehrzeiten möglich sind. Aufgrund der Selbstähnlichkeit des Wiener Prozesses ist zu erwarten, dass bei einer Vergrößerung des Abschnittes um einen Nulldurchgang, erneut mehrere Durchgänge zu beobachten sind.

Wie in (6.20) erwarten wir daher

$$\lim_{T \rightarrow 0} P_{EWZ}(T) = \infty. \quad (6.22)$$

Um die Normierbarkeit der Verteilungen (6.19) und (6.21) zu ermöglichen, müssen wir ein $T^* > 0$ einführen. Wiederkehrzeiten, die sich im Intervall $(0, T^*)$ befinden, werden nicht berücksichtigt. Damit können wir die Nulldurchgänge zählen und die Verteilungen sind normierbar.

Dieses $T^* > 0$ kann frei gewählt werden. In der Wirklichkeit kann es etwa die Unschärfe eines Messgerätes sein.

Im folgenden soll ein Weg zur Berechnung von P_{EWZ} skizziert werden. Die Verteilungen (6.19) und (6.21) haben damit die Form

$$P(T) = \begin{cases} \delta(T) & : \forall T < T^* \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi CT}} & : \forall T \geq T^* \end{cases} \quad (6.23)$$

$$P_{EWZ}(T) = \begin{cases} \delta(T) & : \forall T < T^* \\ P'_{EWZ}(T) & : \forall T \geq T^* \end{cases} .$$

Mit dem Einführen einer Unschärfe T^* sind nun auch die Wahrscheinlichkeiten $P(T)dT$ bzw. $P_{EWZ}(T)$ für alle Zeiten T definiert. Damit lässt sich auch die Deltafunktion

erklären. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Umgebung um die Null $x = 0$ passiert wird, beträgt

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dT P(T) = 1. \quad (6.24)$$

Dieses Ergebnis ist sinnvoll, denn wir haben den Nullpunkt so gewählt, dass dort ein Nulldurchgang stattfindet.

Mit Hilfe dieser beiden Wahrscheinlichkeitsdichten können wir nun eine Relation für das gesuchte $P_{EWZ}(T)$ aufstellen

$$P(T) = \delta(T) + \int_0^T P(T') P_{EWZ}(T - T') dT', \quad (6.25)$$

die wie folgt begründet wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass $x = 0$ in einer Umgebung von $T = 0$ überschritten wird, ist erneut wie in Gleichung (6.24). Die Wahrscheinlichkeit, dass $x = 0$ im Intervall $[T, T + dT]$ passiert wird, beträgt

$$P(T)dT = \int_0^T dT' P(T') P_{EWZ}(T - T') dT. \quad (6.26)$$

$P(T')dT'$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Nulldurchgang, vor dem zur Zeit T , bei T' eintritt. Diese wird mit der Wahrscheinlichkeit, dass die erste Wiederkehrzeit bei $T - T'$ liegt, multipliziert. Über alle möglichen Werte von T' wird integriert.

Mittels Laplacetransformation kann aus Gleichung (6.25) die gesuchte Verteilung der ersten Wiederkehrzeit $P_{EWZ}(T)$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{P\}(s) &= 1 + \mathcal{L}\{P\}(s)\mathcal{L}\{P_{EWZ}\}(s) \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{P_{EWZ}\}(s) &= 1 - \frac{1}{\mathcal{L}\{P\}(s)} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Wir berechnen die Laplacetransformierte von $P(T)$, definiert durch (6.19)

$$\mathcal{L}\{P\}(s) = \int_0^{\infty} dT \frac{e^{-sT}}{\sqrt{T}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad (6.28)$$

und erhalten mit $\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\frac{1}{2}}\right\}(T) = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}}$ einen Ausdruck für die gesuchte Verteilung

$$P_{EWZ}(T) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\right\}(T) = \delta(T) + \frac{T^{-\frac{3}{2}}}{2\pi}. \quad (6.29)$$

Für Zeiten $T \geq T^*$ gilt also das Potenzgesetz

$$P_{EWZ}(T) \sim T^{-\frac{3}{2}}. \quad (6.30)$$

Nach diesen Berechnungen stellt sich die Frage, was bei einem Übergang zu kontinuierlicher Zeit, d.h. $T^* \rightarrow 0$ passiert. Eine $T^{-\frac{3}{2}}$ Verteilung ist auf $[0, \infty)$ nicht normierbar. Eine Normierung der Verteilung im schwachen Sinn, siehe [Sen06] führt auf eine δ -Distribution. Mit einer Testfunktion $\varphi(T)$ erhalten wir

$$\lim_{T^* \rightarrow 0} \frac{\int_{T^*}^{\infty} dT T^{-\frac{3}{2}} \varphi(T) dT}{\int_{T^*}^{\infty} dT T^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{T^* \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\infty} dT' T'^{-\frac{3}{2}} \varphi(T' T^*)}{\int_1^{\infty} dT' T'^{-\frac{3}{2}}} = \varphi(0), \quad (6.31)$$

wobei die Substitution $T = T'T^*$ verwendet wurde. Dieses Verhalten steht in Übereinstimmung mit einem Satz aus der Arbeit von Appleby und Buckwar [AB05]: Die Menge der Nullstellen von Gleichung (6.2) besitzt einen Häufungspunkt bei Null.

Die Selbstähnlichkeit des Wiener-Prozesses auf allen Skalen führt also zur Singularität bei $T = 0$. Sie ist eine Idealisierung. In numerischen (oder realen) Experimenten wird man immer das $T^{-\frac{3}{2}}$ Gesetz finden, da ein unterer cutoff T^* durch die Diskretisierung bzw. die Unschärfe des Messgerätes gegeben ist.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Das wichtigste Ziel dieser Diplomarbeit bestand darin, die einfache Differentialgleichung mit zeitlicher Verzögerung und multiplikativem Rauschen hinsichtlich der Stabilität von Fixpunkten des ersten Momentes und der Sample-Stability zu untersuchen. Das Stabilitätsverhalten des ersten Momentes konnte analytisch bestimmt werden und in numerischen Berechnungen bestätigt werden. Für die Analyse der Sample-Stability sind numerische Ergebnisse gefunden worden.

Um diese numerischen Tests zu verbessern, stellte sich heraus, dass auch die Stabilität von Fixpunkten des zweiten Momentes von Interesse ist. Hierfür konnte ein Stabilitätsgebiet im Parameterraum gefunden werden, das numerisch überprüft wurde.

Im Verlaufe der Rechnungen wurde ebenso die Untersuchung des Systems mit additivem Rauschen notwendig, da es dazu in der Literatur widersprüchliche Aussagen und nur wenig numerische Ergebnisse gibt. Aus diesem Grund wurde in der Diplomarbeit das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Momente berechnet und numerisch überprüft.

Mit diesem Wissen konnte schließlich auch die zweite Aufgabe der Diplomarbeit gelöst werden: Die Berechnung der Verteilung der ersten Wiederkehrzeit für das System mit additivem Rauschen. In Kapitel 6 wurde ebenso eine Äquivalenz zwischen dem kritischen Zustand und dem Auftreten einer Potenzverteilung hergestellt.

Die Analyse des Stabilitätsverhaltens in Abhängigkeit von Koeffizienten der verzögerten Differentialgleichung wurde in der Literatur auch für andere Systeme vorgenommen. In [JBS04] werden jeweils für einen Van der Pool-Oszillator und für ein FitzHugh-Nagumo System mit zeitlicher Verzögerung und additivem Rauschen die Stabilitätsverhalten in Abhängigkeit bestimmter Koeffizienten bestimmt. In [HS05] wird ein allgemeines oszillatorisches deterministisches System mit Verzögerung untersucht. Es wird bestimmt, wie durch Variation von Verzögerung und Koeffizienten eine Stabilisierung von instabilen Zuständen erreicht werden kann.

Die wichtigste Aufgabe, die sich im Anschluss an diese Diplomarbeit stellt, ist eine analytische Bestimmung der Bedingungen, wann die Lösung der DDGL mit multiplikativem Rauschen fast sicher gegen Null geht und stationär wird. In diesem Fall geht auch der zeitliche Mittelwert gegen Null. Eine Parametrisierung dieses Gebietes im Parameterraum ist zu bestimmen.

In der Folge sollte ein mehrdimensionales System mit zeitlicher Verzögerung gesucht werden, das den Zustand marginaler Stabilität von selbst findet.

Außerdem stellen sich weitere Fragen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit un-

beantwortet bleiben. Bei der Untersuchung des Modells mit multiplikativem Rauschen konnten wir erkennen, dass es Trajektorien gibt, die im Mittel stabil sind, deren Fluktuationen aber divergieren. Die Stabilitätsgebiete von erstem und zweitem Moment sind also verschieden. Diese Eigenschaft ist auch bei einem unverzögerten System zu beobachten. Es kann jedoch analytisch gezeigt werden ([SB79] und [GS82]), dass bei Hinzufügen eines nichtlinearen kubischen Terms die Stabilitätsgebiete der Momente identisch sind. Die Wirkung eines kubischen Terms auf die zeitverzögerte Differentialgleichung ist unbekannt.

Nachdem in Abschnitt 2.4 untersucht wurde, ob sich die Gleichung für kleine Verzögerungen vereinfachen lässt, kann man weiterhin untersuchen, ob man im Grenzfall großer Verzögerungen ebenso die statistischen Eigenschaften der stochastischen Differentialgleichung abschätzen kann. Yanchuk und Wolfrum [YW05] geben für die deterministische Gleichung mit großer Verzögerung eine Abschätzung.

Literaturverzeichnis

- [AB05] J.A.D. Appleby und Evelyn Buckwar, *Noise Induced Oscillation in Solutions of Stochastic Delay Differential Equations*, Dynamic Systems and Applications **14(2)**, 175–196 (2005).
- [ASJ06] A. Amann, E. Schöll, und W. Just, *Some basic remarks on eigenmode expansions of time-delay dynamics*, Physica A doi:[10.1016/j.physa.2005.12.073](https://doi.org/10.1016/j.physa.2005.12.073) (2006).
- [BBACT02] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, und C. Cohen-Tannoudji, *Levy statistics and Laser cooling*, Cambridge University Press, 2002, books.google.com.
- [BC63] R. Bellman und L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [Bel61] R. Bellman, *On the computational solution of differential-difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **2**, 108–110 (1961).
- [BFP73] R. Bourret, U. Frisch, und A. Pouquet, *Brownian motion of harmonic oscillator with stochastic frequency*, Physica A **65**, 303–320 (1973).
- [BLM⁺93a] U. Behn, K. Lippert, C. Möller, J.L. van Hemmen, und B. Sulzer, *Memory in the immune system: Network theory including memory B cells and delay*, Phase Transitions: Physics, Mathematics, Biology,..., Proc. Prague June 1-5 1992, Ed. R. Kotecky, World Scientific, Singapore, 27–34 (1993).
- [BLM⁺93b] U. Behn, K. Lippert, C. Möller, J.L. van Hemmen, und B. Sulzer, *Memory in the immune system: Synergy of different strategies*, Proc. European Conference on Artificial Life (ECAL), Brussels, 63–73 (1993).
- [DY95] M. Ding und W. Yang, *Distribution of the first return time in fractional Brownian motion and its applications to the study of on-off intermittency*, Physical Review E **52**, 207–213 (1995).
- [Fra04] T.D. Frank, *Analytical results for fundamental time-delayed feedback systems subjected to multiplicative noise*, Physical Review E **69**, 061104 1–11 (2004).
- [Fra05] T.D. Frank, *Delay Fokker-Planck equations, Novikov’s theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations*, Physical Review E **72**, 011112 (2005).

- [Fur63] K. Furutsu, J. Res. NBS D **667**, 303 (1963).
- [GLL99] S. Guillouxic, I. L’Heureux, und A. Longtin, *Small delay approximation of stochastic delay differential equations*, Physical Review E **59**, 3970–3982 (1999).
- [GS82] R. Graham und A. Schenzle, *Stabilization by multiplicative noise*, Physical Review A **26**, 1676 (1982).
- [Hal77] J. Hale, *Theory of Functional-Differential Equations*, Berlin: Springer, 1977.
- [HPH94] J.F. Heagy, N. Platt, und S.M. Hammel, *Characterization of on-off intermittency*, Physical Review E **49**, 1140 (1994).
- [HS05] P. Hövel und E. Schöll, *Control of unstable steady states by time delayed feedback methods*, Physical Review E **72**, 046203 (2005).
- [JBS04] N. Janson, A. Balanov, und E. Schöll, *Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion*, Physical Review Letters **93**, 010601 (2004).
- [KEB02] M. Krieger, J. Emmerich, und U. Behn, unveröffentlichtes Manuskript, November 2002.
- [KM92] U. Küchler und B. Mensch, *Langevins stochastic differential equation extended by a time-delayed term*, Stochastics and stochastics reports **40**, 23 (1992).
- [Kri97] M. Krieger, *Stochastische Differentialgleichungen mit zeitlicher Verzögerung bei marginaler Stabilität*, Diplomarbeit, Universität Leipzig, 1997.
- [Lip95] K. Lippert, *Gedächtnis im Immunsystem - Architektur und Dynamik des Idiotypischen Netzwerks*, Dissertation, Universität Leipzig, 1995.
- [LK80] R. Lang und K. Kobayashi, *External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties*, IEEE Journal of Quantum Electronics **16**, 347–355 (1980).
- [LM02] S. Lim und S. Muniandy, *Self-similar Gaussian processes for modeling anomalous diffusion*, Physical Review E **66**, 021114 (2002).
- [LM06] J. Lei und C. Mackey, *Moment stability of stochastic differential delay equations*, SIAM Journal of Applied Mathematics (2006), zu veröffentlichen.
- [Mac89] N. MacDonald, *Biological delay systems: linear stability theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [Mar03] O.E. Martin, *Wiederkehrzeitverteilungen in rauschgetriebenen nichtlinearen Systemen*, Diplomarbeit, Universität Leipzig, 2003.
- [MN95] M. Mackey und I. Nechaeva, *Solution moment stability in stochastic differential delay equations*, Physical Review E **52**, 3366–3376 (1995).

- [Nov64] E.A. Novikov, JETP **47**, 1919 (1964), (russisch).
- [Ohi00] T. Ohira, *Delayed stochastic systems*, Physical Review E **61**, 1247–1257 (2000).
- [Ose68] V.I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem*, Trans. Moscow Math. Soc **19** (1968).
- [Pap65] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [Saa67] T. Saaty, *Modern nonlinear equations*, McGraw-Hill Book Company, 1967.
- [SB79] A. Schenzle und H. Brand, *Multiplicative stochastic processes in statistical physics*, Physical Review A **20**, 1628 (1979).
- [Sen06] F. Senf, *Rauschgetriebene Phasenübergänge im Nichtgleichgewicht: Asymptotische Eigenschaften gekoppelter Stratonovich-Modelle*, Diplomarbeit, Universität Leipzig, 2006.
- [SL78] V.E. Shapiro und V.M. Loginov, *Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations*, Physica A **91**, 563–574 (1978).
- [Sus78] H.J. Sussmann, *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations*, The Annals of Probability **60**, 19–41 (1978).
- [WC57] P.J. Wangersky und W.J. Cunningham, *Time lag in prey-predator population models*, Ecology **38**, 136–139 (1957).
- [YO] T. Yamane und T. Ohira, *Two-point correlation function of Langevin equation with time-delayed term*, Sony Computer Science Laboratory, Technical Report, SCSL-TR-99-017.
- [YW05] S. Yanchuk und M. Wolfrum, *Instabilities of equilibria of delay-differential equations with large delay*, ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands (7-12 August 2005).

Danksagung

Mein erster Dank gilt allen, die mir geholfen haben, mich in das Thema der Diplomarbeit einzuarbeiten. Besonders möchte ich Herrn Prof. Dr. Ulrich Behn erwähnen. Ich danke ihm für seine ständige Ansprechbereitschaft und für viele Diskussionen, die wesentlich zum Abschluss der Arbeit beigetragen haben. Außerdem danke ich meinen Freunden und Kommilitonen, die während der Diplomarbeit für schnelle Fragen ein offenes Ohr hatten und mit einfachen Hilfen die Arbeit erleichtern konnten. Ich danke meinen Eltern, die mich während des Studiums in meinen Entscheidungen unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen Quellen als die im Literaturverzeichnis angegebenen benutzt.

Leipzig, den 16. Oktober 2006

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass meine Diplomarbeit nach positiver Begutachtung zur Benutzung in der Zweigstelle Physik der Universitätsbibliothek Leipzig zur Verfügung steht.

Leipzig, den 16. Oktober 2006

