

Die Lagrangepunkte des eingeschränkten Dreikörperproblems

Sandra Schumann

Gliederung

- Mehr-Körperproblem
- 3-Körperproblem
- eingeschränktes 3-Körperproblem
- Kräftegleichung – Lösungsansatz
- Lösung
- Stabilität – Trajektorien
- Anwendungen

Mehr-Körperproblem

- Ausgangspunkt sind Bilanzgleichungen für Impuls, Drehimpuls, Energie der Körper etc.
- Bewegungsgleichung für n Massepunkte m_i :

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{ij}) G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

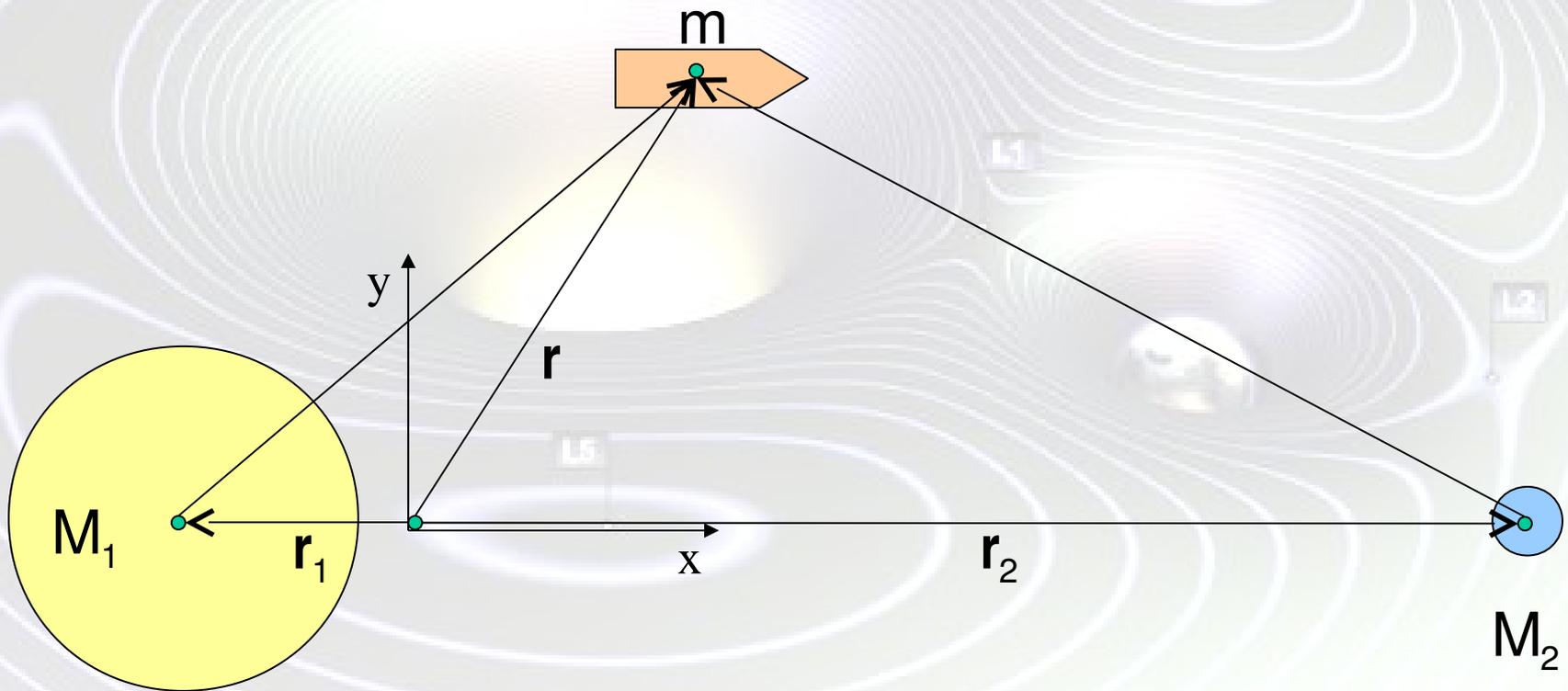
- ab $n=3$ i.a. nur numerisch lösbar

3-Körperproblem

- Näherungslösungen:
 - alle m_i vergleichbar (enger Doppelstern, entfernter Begleiter)
 - $m_1 \gg m_2 \gg m_3$ (Sonne - Planet - Mond)
 - $m_1 \gg m_2 \approx m_3$ (Sonne - Jupiter - Saturn)
 - $m_1 \gg m_2, m_3 \approx 0$ (Erde - Mond - künstliche Sonde)

eingeschränktes 3-Körperproblem

eingeschränktes 3 Körperproblem



Kräftegleichung – Lösungsansatz

- Gravitationskraft im Inertialsystem:

$$F_{\text{Grav}} = -G \frac{mM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) - G \frac{mM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} (\vec{r} - \vec{r}_2).$$

- Zentrifugalkraft:

$$F_{\text{Zentr}} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m\vec{\Omega}^2 \vec{r}.$$

- Punkte suchen, für die gilt:

$$\dot{\vec{r}} = 0, \quad F_{\text{Grav}} + F_{\text{Zentr}} = 0.$$

Lösung

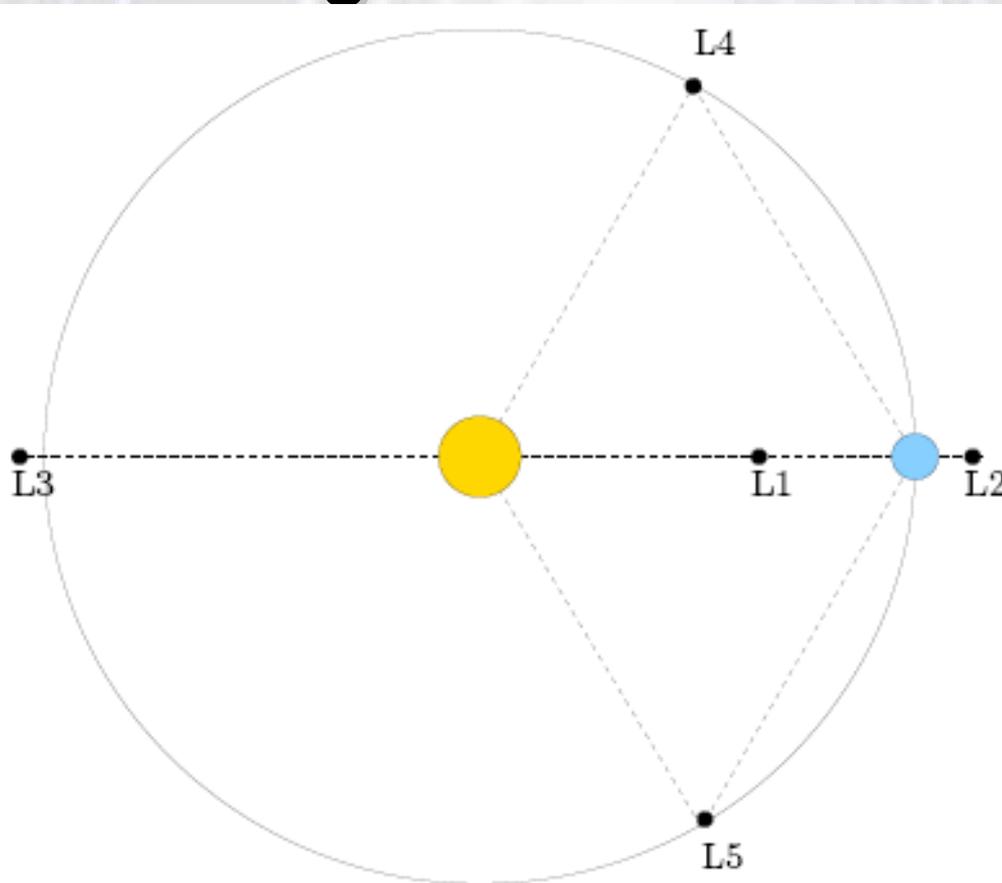


Abbildung 1: Zur Definition der Lagrangepunkte.

$$L_1 = \left[R \left(1 - \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \right), 0 \right],$$

$$L_2 = \left[R \left(1 + \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \right), 0 \right],$$

$$L_3 = \left[- \left(1 + \frac{5}{12} \alpha \right) R, 0 \right],$$

$$L_4 = \left[\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} R \right],$$

$$L_5 = \left[\left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} R \right].$$

$$R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

Lineare Stabilitätsanalyse I

- Am Gleichgewichtspunkt gilt:

$$\dot{\vec{r}}|_{r_0} = 0$$

- Wir betrachten:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \quad \dot{\vec{r}} = \delta\dot{\vec{r}}$$

- Taylorreihe an diesem Punkt:

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}, \delta\dot{\vec{r}}) = \vec{F}(\vec{r}_0, 0) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{r}} \delta\vec{r} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{r}}} \delta\dot{\vec{r}} + O$$

Lineare Stabilitätsanalyse II

- Jacobi-Matrix wird erstellt, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\vec{r}} \\ \delta \ddot{\vec{r}} \end{pmatrix} = \mathbb{J} \begin{pmatrix} \delta \vec{r} \\ \delta \dot{\vec{r}} \end{pmatrix}$$

- Newtonsche Bewegungsgleichung nahe dem Gleichgewichtspunkt:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \ddot{x} \\ \delta \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial y} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial \dot{x}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^x}{\partial \dot{y}} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial x} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial y} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial \dot{x}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F^y}{\partial \dot{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Stabilität

- **Reelle EW:** geradlinige Bewegung von Gleichgewichtspkt. weg oder auf ihn zu
- **Imaginäre EW:** Rotation um Gleichgewichtspkt.
- **Komplexe EW:** Spiralbahn von Gleichgewichtspkt. weg oder auf ihn zu, z.B. L4, L5
- **Gemischte EW:** verschiedene Bewegungen, z.B. bei L1 - L3 Sattelpkt.

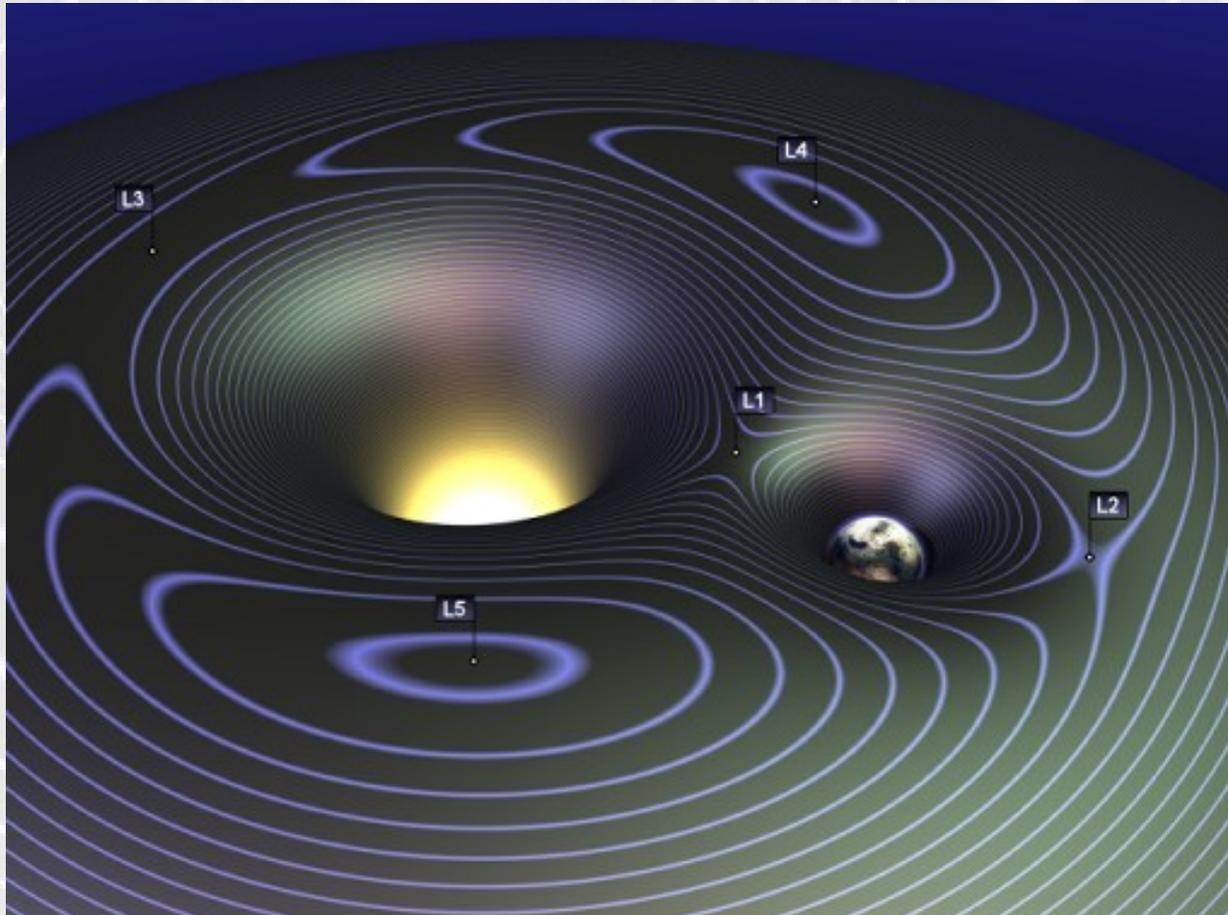
Eigenwerte und Stabilität

- L1, L2: $\lambda_{\pm} = \pm\Omega\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$ $\sigma_{\pm} = \pm i\Omega\sqrt{2\sqrt{7} - 1}$
 – Instabil, $\tau \approx 23$ Tage

- L3: $\lambda_{\pm} = \pm\Omega\sqrt{\frac{3M_1}{8M_2}}$ $\sigma_{\pm} = \pm i\Omega\sqrt{7}$
 – Instabil, $\tau \approx 150$ Jahre

- L4, L5: $\lambda_{\pm} = \pm i\frac{\Omega}{2}\sqrt{2 - \sqrt{27k^2 - 23}}$ $\sigma_{\pm} = \pm i\frac{\Omega}{2}\sqrt{2 + \sqrt{27k^2 - 23}}$
 – Stabil, wenn $M_1 \geq 24,96 M_2$ $k^2 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$

Stabilität – Trajektorien



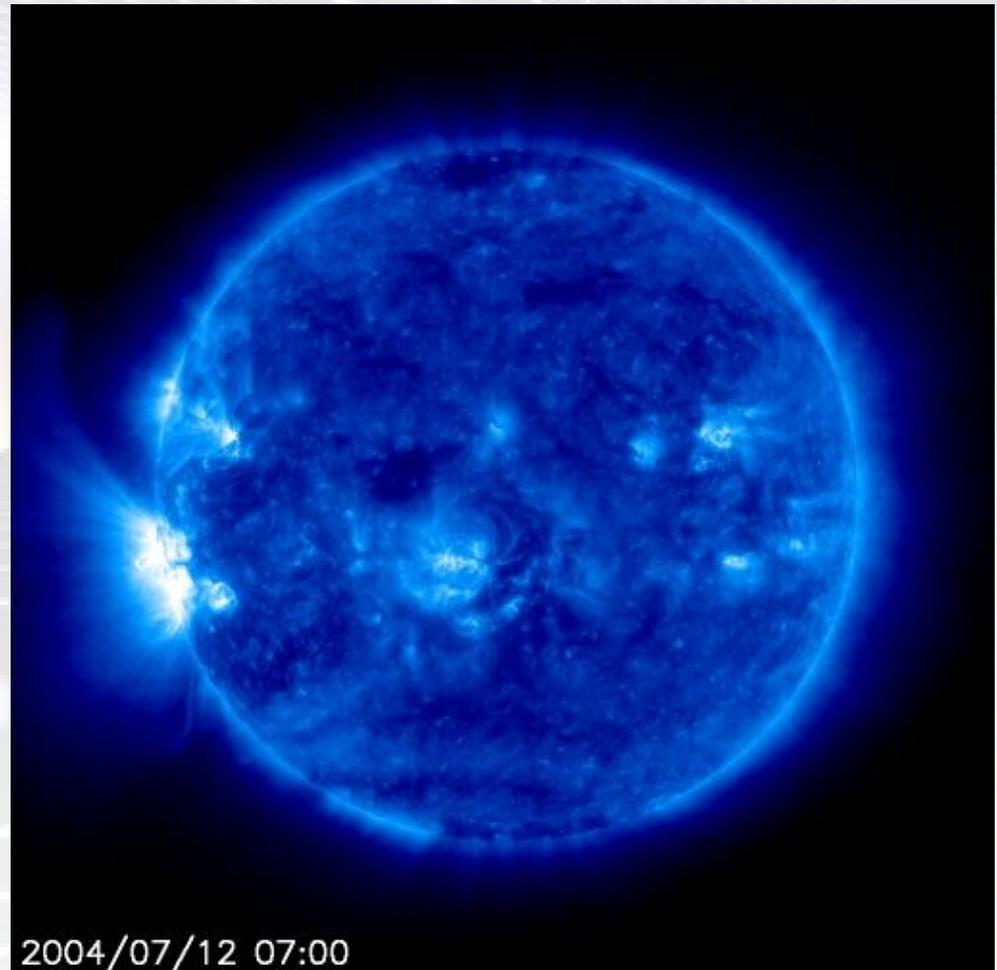
L1 – SOHO, Solar and Heliospheric Observatory

- am 2. Dezember 1995 gestartet, dt.-am. Gemeinschaftsprojekt
- 12 verschiedene Instrumente erforschen sowohl das Innere als auch die Korona der Sonne und die Entstehung des Sonnenwindes

<http://www.bernd-leitenberger.de/soho.shtml>

Extreme Ultraviolet Imaging Telescope (EIT)

- Beobachtung bei extremen UV, 17,1 – 30,4 nm
- dies entspricht Temperaturen von 0,4 - 3 Mio K in der oberen Atmosphäre und Korona.



L1 - Genesis

- startete am 8.8.2001
- Sammlung von Sonnenmaterie (geladenen Teilchen) mit Kollektoren
 - 55 hexagonale Scheiben von je 10 cm Durchmesser
 - versch. Materialien: Silizium, Germanium, künstliche Diamanten, Saphir, beschichtetes Glas
 - Gesamtoberfläche beträgt 4.732 m^2



<http://www.bernd-leitenberger.de/genesis.shtml>

L1 – ACE

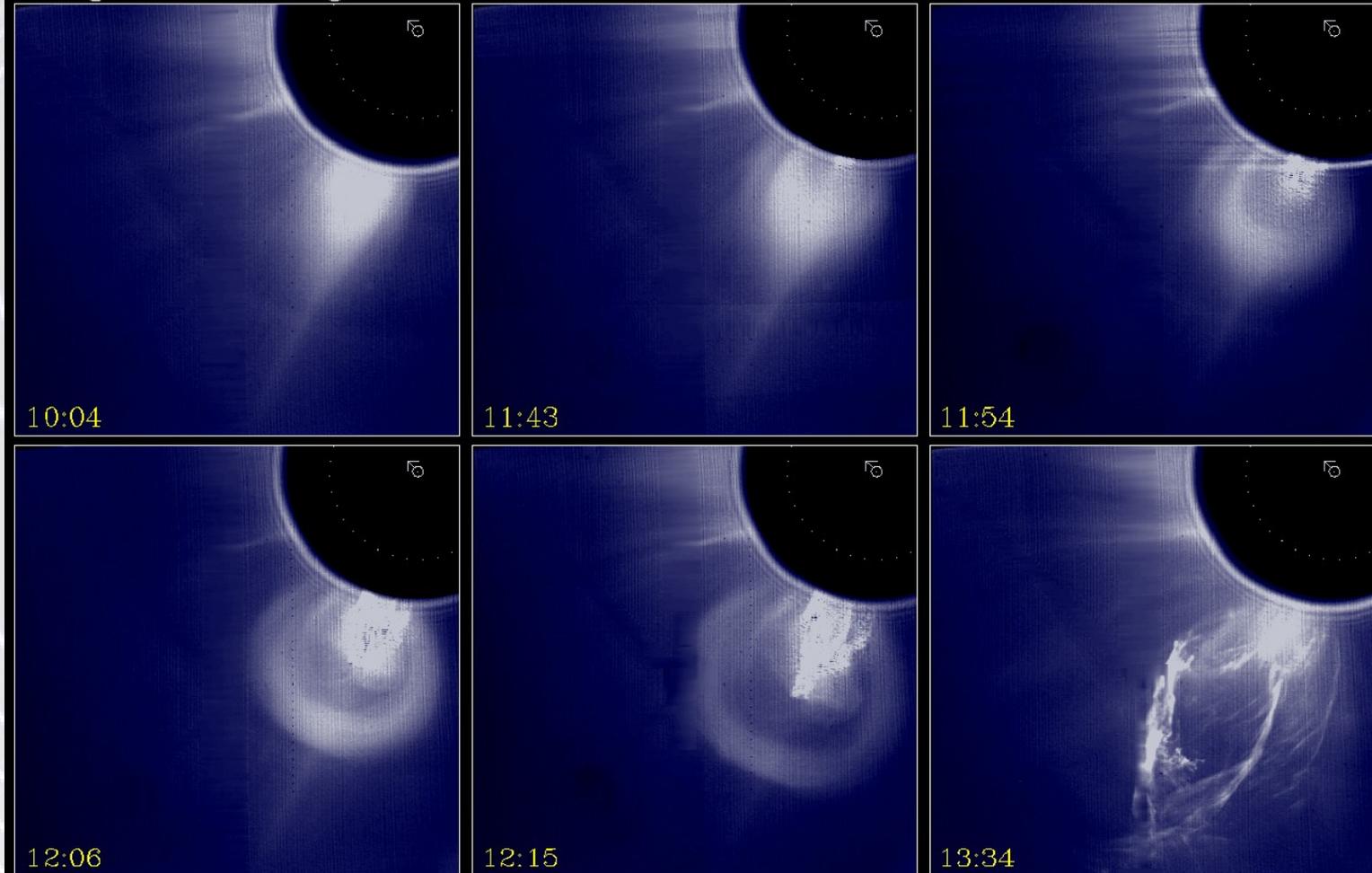
Advanced Composition Explorer

- Start 1997, lauffähig bis 2019
- Analyse der Teilchen von der Sonne, der Sonnenkorona und von interstellaren Quellen
- Real-time Information zum Solarwind
- Warnungen vor Sonnenwindstürmen auf der Erde ca. 1h vorher

http://www.srl.caltech.edu/ACE/ace_mission.html

Coronal Mass Ejection (CME)

18 Aug 1980: White Light

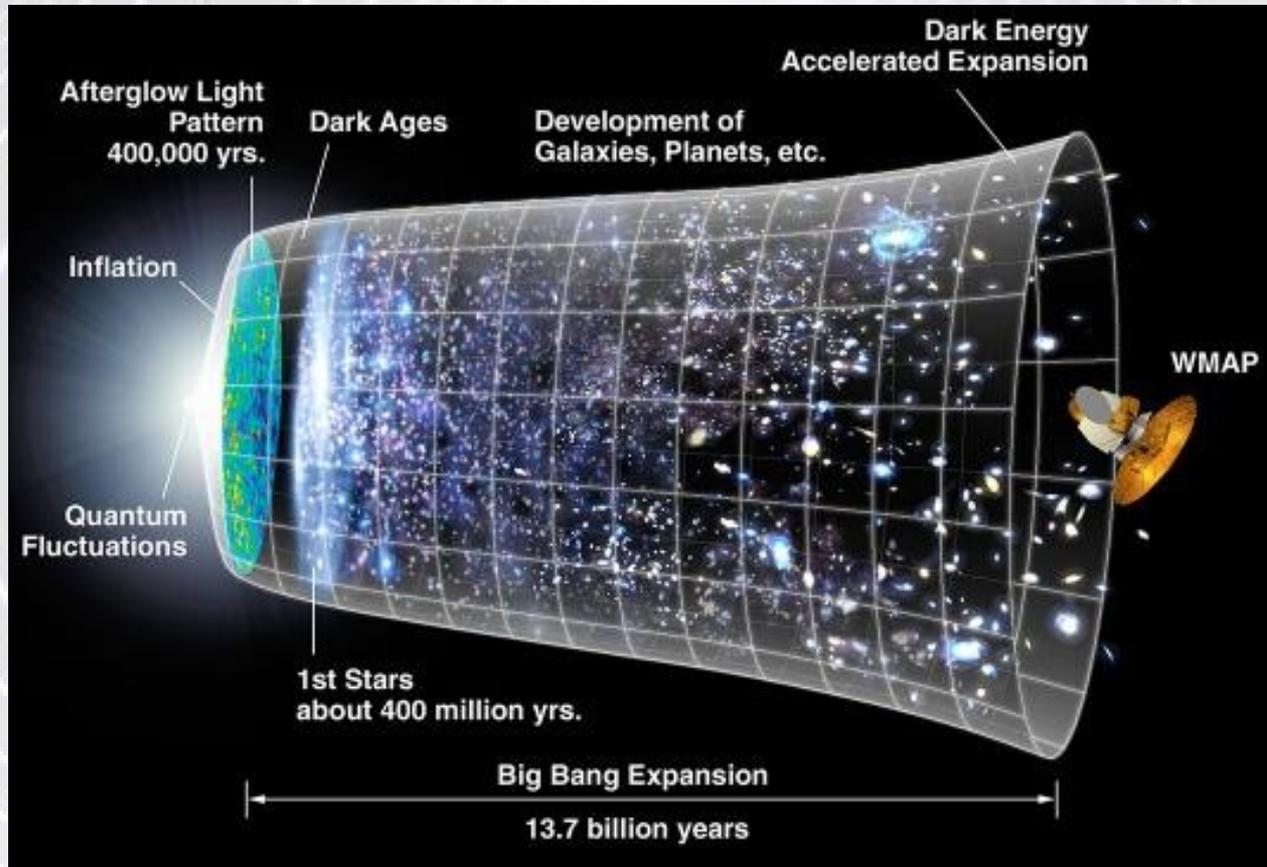


Source: High Altitude Observatory/Solar Maximum Mission Archives

HAO A-013

L2 – WMAP

Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

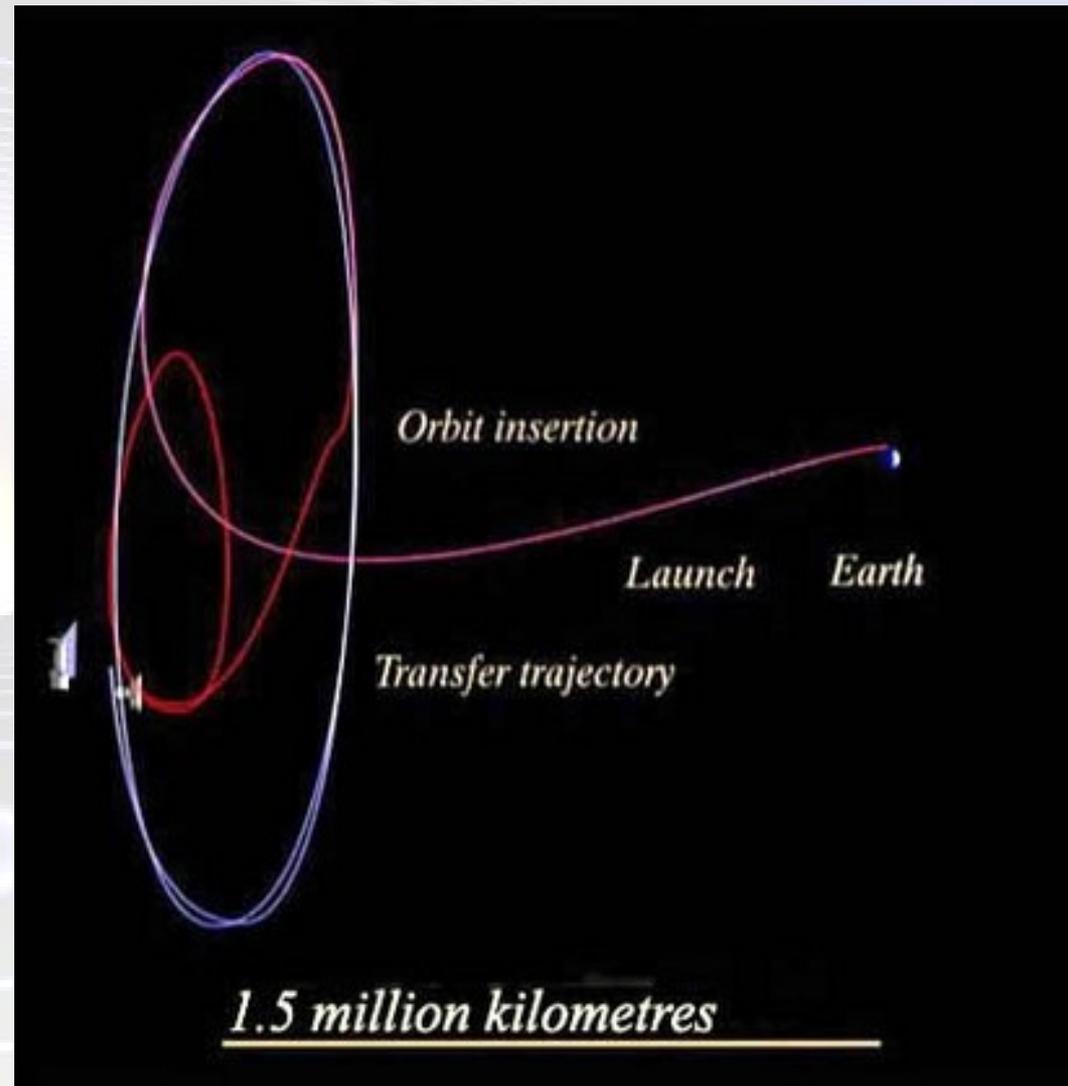


- Start: 30.6.2001, geplantes Ende: 2009
- Bilder vom „frühesten“ Universum

<http://map.gsfc.nasa.gov/>

L2 - Teleskope

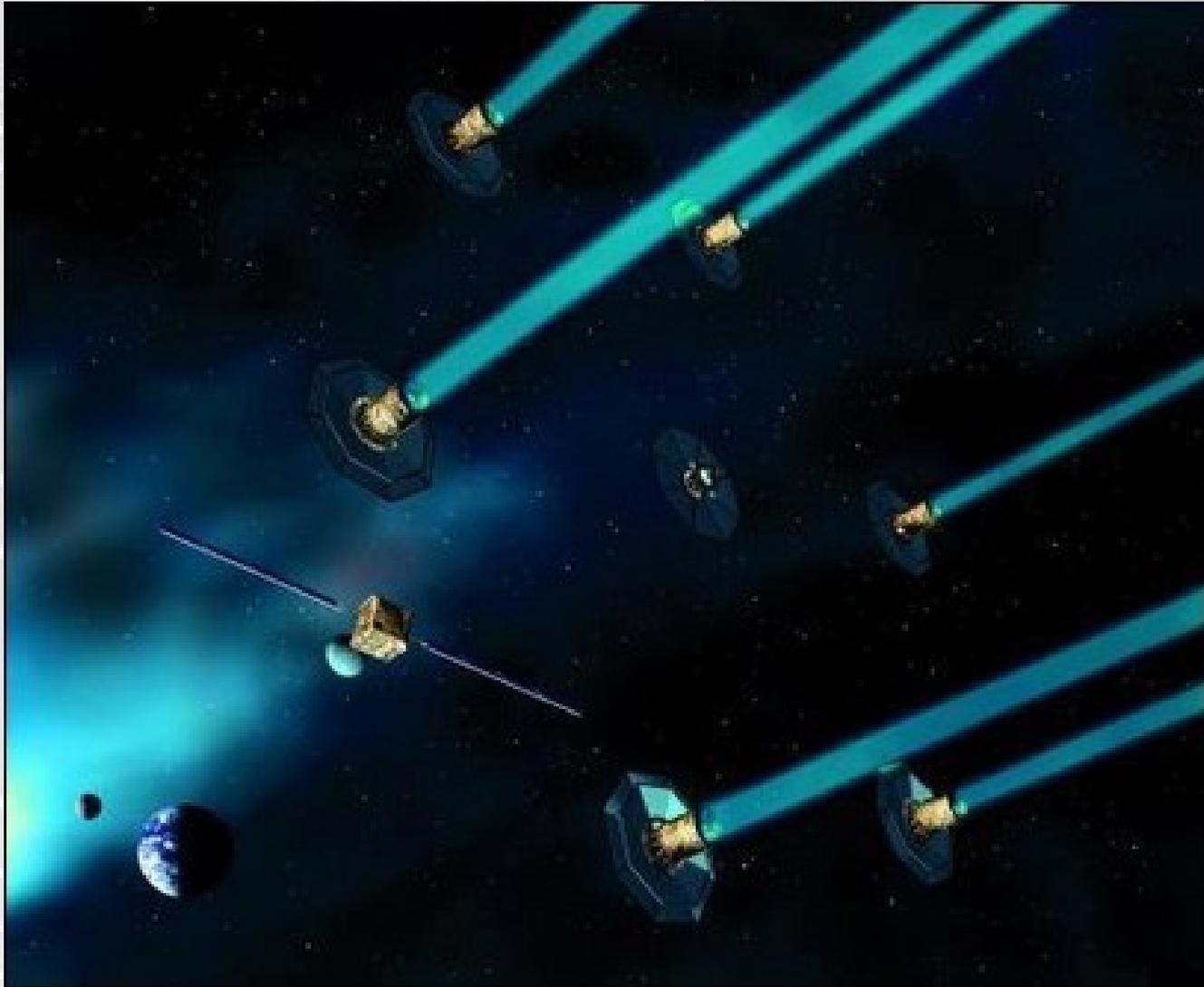
- **Herschel und Planck (2007/8), ESA**
- **James Webb Space Telescope, 2013**



<http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=17>

L2 – GAIA, Darwin

- **GAIA**: Start 2011; Global Astronomic Interferometer for Astrophysics; genaue Vermessung von Sternen, Galaxien und anderen Himmelsobjekten
- **Darwin**: Start 2015; Suche nach erdähnlichen Planeten, deren Beobachtung und Suche nach Anzeichen von Leben



<http://darwin.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=28>

L3 – Planet X

- kann nicht existieren
- als Sammelpunkt einer Invasionsflotte gut geeignet



L4, L5 – Jupiter, Mars, Neptun

- Trojaner sind 2 Gruppen von Asteroiden des **Jupiters**
- vorausseilende nach griechischen, nacheilende nach trojanischen Helden aus Homers „Ilias“ benannt
- **Mars** – Eureka, + 4 andere
- **Neptun** 2 entdeckt, viele vermutet

L4, L5 – Saturn

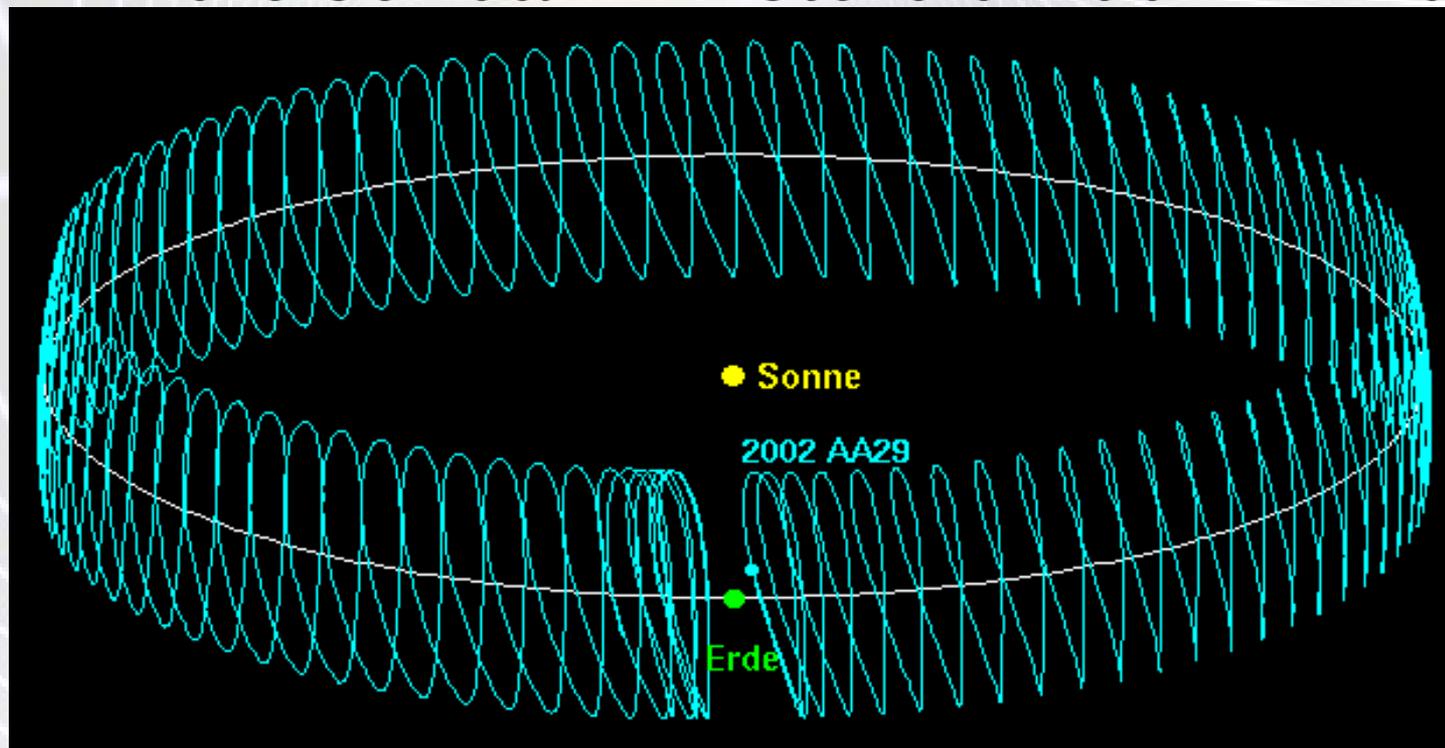
Saturnmonde:

- Telesto vor
Tethys vor
Calypso
- Helene vor
Dione vor
Polydeuces



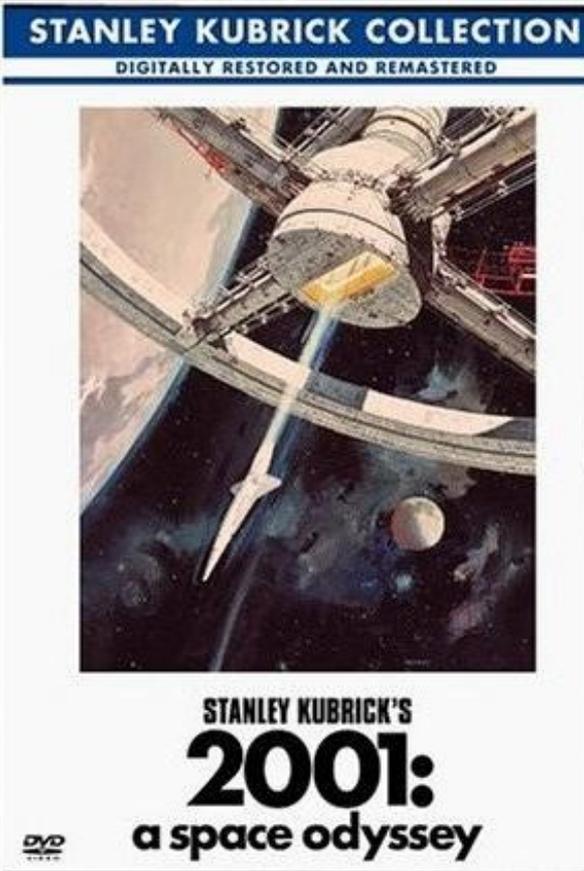
L4, L5 - Erde

- Keine größeren Asteroiden, nur Staub;
Hufeisenbahn: Asteroid 2002 AA29



L4, L5 – Space Colonies

- erste wiss. Erwähnung, von O'Neill: „The Colonization of Space“, 1974
- „L5 Society“ – „National Space Society“, Raumstation im Erde-Mond-System
- grosser rotierender Aluminium-Zylinder dessen Innenseite bewohnt ist
- Tag/Nacht-Rhythmus durch Spiegel
- Energie durch SPS-Satelliten



Wikipedia: „Stanford Torus“

Vielen Dank!

Literatur:

- N.J. Cornish, J. Goodman: The Lagrange Points, <http://www.physics.montana.edu/faculty/cornish/lagrange.pdf>
- S. Prüfer: Die Hohmann-Ellipse und die Lagrange-Punkte für die Raumfahrt, Dokumentation zur Besonderen Lernleistung, 2005
- viele Links dazu befinden sich auf der HP von Prof. Behn