

Vortrag:
HAMILTONSche Mechanik in symplektischer Form

Luis Haug
Andreas Klaiber

Leipzig, den 1. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

I	Symplektische Struktur des Phasenraums I	2
1	HAMILTONsche Gleichungen	2
2	Struktur der HAMILTON-Gleichungen	2
3	Symplektische Struktur	3
4	POISSON-Klammern	6
5	Kanonische Transformationen	8
II	Symplektische Struktur des Phasenraums II	11
1	Mathematische Vorbereitungen	11
2	Heuristische Vorbetrachtungen/Motivation	13
3	Die Symplektische Form ω^2	14
4	Kanonische Transformationen, Volumenerhaltung	14
5	HAMILTONsches Vektorfeld	14
6	POISSON-Klammern	15
7	LIUVILLE-Theorem	16

I Symplektische Struktur des Phasenraums I

1 HAMILTONsche Gleichungen

Es seien q_1, \dots, q_n generalisierte Koordinaten des Zustandsraums und p_1, \dots, p_n die zugehörigen konjugierten Impulse, d.h. $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ sind Koordinaten des Phasenraums. Ferner sei eine (glatte) Funktion $H = H(q, p, t) \in \mathbb{R}$ – die HAMILTON-Funktion – gegeben. Dann muss die Lösungskurve $(q, p) = (q(t), p(t))$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

Hergeleitet wurde dieser Sachverhalt ausgehend von den LAGRANGE-Gleichungen, die aus einem Variationsprinzip folgen und von q und \dot{q} abhängen. Man geht zu den konjugierten Impulsen über und die LEGENDRE-Transformation überführt die LAGRANGE-Funktion in die HAMILTON-Funktion, die nun von q und p abhängt.

2 Struktur der HAMILTON-Gleichungen

Zunächst werden wir unter dem Phasenraum $\Pi = \{(q, p)\}$ eine $2n$ -dimensionalen Vektorraum verstehen. Das ist im allgemeinen nicht richtig, sondern nur lokal gültig.

Um mehr von der Struktur, die hinter den HAMILTON-Gleichungen steckt, zu verstehen, ist es nützlich die Koordinaten q und p in (q, p) nicht mehr getrennt zu behandeln, sondern es als einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{2n}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

aufzufassen. Die Gleichungen (*) nehmen dann die folgende Form an:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial x_{i+n}} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \\ \dot{x}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_{i-n}} \quad \text{für } i = n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Gleichungen nun in einer Gleichung der Form

$$\dot{x} = I \partial_x H$$

zusammenfassen. Dabei ist

$$\partial_x H := \frac{\partial H}{\partial x} := \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)$$

der Gradient von H und $I \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ eine quadratische Matrix.

Welche Einträge hat diese Matrix?
 Durch Vergleich mit den Gleichungen (1) sieht man, dass I folgende Blockgestalt hat:

$$I = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{Id} \\ \hline -\text{Id} & 0 \end{array} \right).$$

Diese Matrix, der im folgenden eine wichtige Rolle zukommt, heißt symplektische Eins. Nun hat (1) in Komponenten-Schreibweise die Form

$$\dot{x}_i = I_{ij} \partial_{x_j} H.$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen kann man die geometrische Bedeutung der HAMILTON-Gleichungen erkennen. Die Abbildung

$$X_H : x \mapsto I \partial_x H$$

ordnet jedem Punkt x des Phasenraums einen (Tangential-)Vektor des Phasenraums zu. Man bezeichnet eine solche Zuordnung als *Vektorfeld* (siehe unten). Insbesondere heißt X_H HAMILTONsches Vektorfeld.

Die HAMILTONschen Gleichungen reduzieren sich nun auf

$$\dot{x} = X_H(x).$$

In Worten bedeutet dies, die Tangenten jeder Lösungskurve $x = x(t)$ müssen stets parallel zum HAMILTONschen Vektorfeld ausgerichtet sein.

Beispiel (Ebenes mathematisches Pendel).

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + mgL (\cos(q) - 1) \\ \partial_q H &= -mgL \sin(q) \\ \partial_p H &= \frac{p}{m} \end{aligned}$$

Zugehöriges Vektorfeld:

$$X_H : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mapsto I \begin{pmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ mgL \sin(q) \end{pmatrix}$$

BILD

3 Symplektische Struktur

Bis dato ist nicht klar, welche geometrischen Eigenschaften der Phasenraum Π eigentlich hat. Wir werden nun sehen, dass man auf Π eine Bilinearform definieren kann, die ein wenig dem Skalarprodukt ähnelt.

Definition (Symplektische Struktur). Sei V ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum. Eine symplektische Struktur auf V ist eine schiefsymmetrische nichtentartete Bilinearform ω auf V , d.h. eine Abbildung

$$\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

- (Symp1) $\omega(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \omega(v_1, w) + \alpha_2 \omega(v_2, w)$ (Bilinearität)
 (Symp2) $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ (Schiefsymmetrie)
 (Symp3) $\forall v : \omega(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0$ (Nichtentartung)

für alle $v_1, v_2, w \in V$.

Wir können dem Phasenraum Π unter Verwendung der oben erklärten Matrix I eine symplektische Struktur ω aufprägen.

Satz. Die Abbildung

$$\omega : \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^T I w = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i I_{ij} w_j$$

definiert eine symplektische Struktur auf Π .

Beweis. Bilinearität ist unmittelbar aus der Definition klar.

Schiefsymmetrie folgt aus $I^T = -I$:

$$I^T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & & & \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & & & \end{array} \right) = -I$$

Damit gilt

$$\omega(v, w) = v^T I w \stackrel{(*)}{=} (v^T I w)^T = w^T I^T v = -w^T I v = -\omega(w, v),$$

wobei an der Stelle (*) benutzt wurde, dass $\omega(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}$ ist.

Die Nichtentartung sieht man so: Für alle $v \in T_x M$ gilt $\omega(v, w) = 0$, d.h.

$$0 = \omega(v, w) = (v^T I) w = (-v_{n+1}, \dots, -v_{2n}, v_1, \dots, v_n) w.$$

Insbesondere gilt das für die Vektoren $\pm e_i$, also

$$\begin{aligned} 0 &= v_i w_{i+n} = w_{i+n} \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \\ 0 &= v_{i+n} w_i = w_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

QED.

Bemerkung. (i) Die Definition von ω ist insofern problematisch, als dass die Matrix I nur bezüglich gewisser **gewählter** Koordinaten (q, p) genau die oben genannte Blockgestalt hat, von der wir im Beweis Gebrauch gemacht haben. Es ist daher nun keineswegs klar, ob wir für **jede** Wahl von Koordinaten die gleiche symplektische Struktur bekommen, weil unsere Definition explizit von gewählten Koordinaten und somit von einer gewählten Basis abhängt. Dass dies doch basisunabhängig ist – man sagt kanonisch –, werden wir weiter unten diskutieren, weil man dazu sehr viel mehr Mathematik benötigt. Wir werden dennoch schon benutzen, dass ω stets die angegebene Form hat.

- (ii) Man kann berechtigterweise die Frage stellen, warum wir es uns nicht einfacher machen und das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt benutzen, um auf diese Weise sogar einen euklidischen Raum zu erhalten. Der Grund ist physikalischer Natur: die Transformationen, die wir im folgenden betrachten werden, lassen das euklidische Skalarprodukt nicht invariant.

Wir interessieren uns als nächstes für diejenigen linearen Abbildungen, die symplektische Struktur erhalten. Das ist eine prinzipiell ähnliche Situation wie im euklidischen Fall; dort sind es genau die orthogonalen Transformationen, die bekanntermaßen eine Gruppe bilden – die *orthogonale Gruppe*. Wir werden sehen, dass wir auch eine Gruppe erhalten – die *symplektische Gruppe*.

Wir suchen nun lineare Abbildungen

$$M : \Pi \rightarrow \Pi,$$

für die

$$(2) \quad \omega(Mv, Mw) = \omega(v, w) \quad \forall v, w \in \Pi$$

gilt. Solche Abbildungen heißen symplektisch. Setzen wir die Definition von ω ein, so folgt mit (2)

$$v^T I w = (Mv)^T I (Mw) = v^T (M^T I M) w.$$

Somit ist die lineare Abbildung M genau dann symplektisch, falls

$$(3) \quad M^T I M = I$$

gilt. Die Menge aller symplektischen Abbildungen heißt symplektische Gruppe und wird mit $Sp(2n)$ bezeichnet (dabei steht $2n$ für die Dimension des Vektorraumes, auf dem die symplektische Abbildung operiert).

Satz. $G := Sp(2n)$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) Für jedes $M \in G$ gilt:

$$\det M = \pm 1,$$

insbesondere ist M invertierbar.

- (ii) G ist eine Gruppe bezüglich der Komposition \circ von Abbildungen.

- (iii) Mit $M \in G$ ist auch $M^T \in G$.

- (iv) Es gilt $I \in G$.

Beweis. (i) Aus

$$M^T I M = I$$

folgt

$$\det(I) = \det(I) \cdot \det(M)^2 \iff \det(M) = \pm 1.$$

- (ii) Wir haben viererlei Dinge zu zeigen:

- (a) G ist abgeschlossen unter \circ , d.h. mit $M_1, M_2 \in G$ ist auch $M_1 \circ M_2 \in G$.

(b) Es gibt ein neutrales Element $E \in G$, für das

$$E \circ M = M \circ E = M \quad \forall M \in G$$

gilt.

(c) Die Verknüpfung \circ ist assoziativ.

(d) Zu jedem $M \in G$ existiert ein Element $N \in G$, sodass

$$M \circ N = N \circ M = E$$

gilt.

Zu (a): Es gilt

$$(4) \quad M_1^T I M_1 = I$$

$$(5) \quad \text{und } M_2^T I M_2 = I.$$

Somit ist

$$(M_1 \circ M_2)^T I (M_1 M_2) = M_2^T (M_1^T I M_1) M_2 \stackrel{(5)}{=} M_2^T I M_2 \stackrel{(4)}{=} I,$$

also gilt $M_1 \circ M_2 \in G$.

Zu (b): Setze

$$E := \text{Id}.$$

Zu (c): Klar.

Zu (d): Setze

$$N := M^{-1}.$$

(iii) (Wir beweisen diesen Punkt, weil wir ihn später benötigen). Es gelte $M^T I M = I$. Dann folgt

$$M^T = -I M^{-1} I,$$

durch Multiplikation mit I und M von links geht das über in

$$M I M^T = I.$$

(iv) Es gilt

$$I^T I = I^T (-\text{Id}) = I,$$

also $I \in G$.

QED.

4 POISSON-Klammern

Ein sehr nützliches Hilfsmittel der HAMILTONSchen Mechanik sind die POISSON-Klammern. Allerdings sind sie nicht nur zum Rechnen gut, vielmehr verbirgt sich hinter ihnen eine Aussage über die Struktur der Menge der Hamilton-Funktionen (diese bildet mit der Poisson-Klammer eine Lie-Algebra und zwar auf eine mit der Lie-Algebra der Hamiltonschen Vektorfelder verträglichen Weise).

Die Einführung der symplektischen Struktur im letzten Abschnitt erlaubt es uns, die POISSON-Klammern koordinatenfrei zu definieren. Zunächst ordnen wir jeder glatten Funktion $g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ **eindeutig** ein Vektorfeld folgendermaßen zu: Wir gehen vom Differential

$$d_x g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto d_x g(v)$$

aus (dies ist eine lineare Abbildung, deren Komponenten die partiellen Ableitungen sind) und definieren ein Vektorfeld X_g durch die Forderung

$$\forall x \in \Pi, v \in T_x \Pi : d_x g(v) = \omega(X_g(x), v).$$

Diese Definition ist eindeutig aufgrund der Nichtentartung von ω : Falls für zwei Funktionen $f, g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ die Differentiale übereinstimmen, d.h. $d_x g = d_x f$, dann auch die Vektorfelder X_g, X_f :

$$\begin{aligned} \forall v \in T_x \Pi : 0 &= d_x g(v) - d_x f(v) = \omega(X_g(x), v) - \omega(X_f(x), v) \\ &= \omega(X_g(x) - X_f(x), v) \Rightarrow X_g(x) - X_f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow X_g(x) = X_f(x). \end{aligned}$$

Beispiel (Komponenten von X_g). Wir berechnen die Komponenten von X_g . Wir wissen

$$d_x g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial q_n}, \frac{\partial g}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial p_n} \right)$$

und

$$\omega(v, w) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} v_i I_{ij} w_j.$$

Sei $x \in \Pi$ und $X_g(x) = (X_i)_i$. Setzen wir dies ein, so folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} v_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} X_i I_{ij} v_j.$$

Diese Relation gilt nach Definition für alle $v \in T_x \Pi$, also insbesondere für die Standardbasisvektoren. Für $\alpha = 1, \dots, n$ setze $v := e_\alpha$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \\ \text{RHS} &= X_i I_{ij} \delta_{j\alpha} = X_i I_{i\alpha} = -X_{n+\alpha}. \end{aligned}$$

Setze nun $v := e_{n+\alpha}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\partial g}{\partial x_{n+\alpha}} = \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \\ \text{RHS} &= X_i I_{ij} \delta_{j, n+\alpha} = X_i I_{i, n+\alpha} = X_\alpha. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$d_x g = \left(-\frac{\partial g}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial g}{\partial p_n}, \frac{\partial g}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial q_n} \right).$$

Bemerkung. Wir haben diese Art von Konstruktion schon weiter oben bei der Definition des HAMILTONschen Vektorfeldes benutzt. Tatsächlich erhält man für $g = H$ das Vektorfeld X_H .

Nun können wir die POISSON-Klammer definieren.

Definition (POISSON-Klammer). Für zwei (glatte) Funktionen $f, g : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$$

POISSON-Klammer von f und g .

Bemerkung. (i) Dabei ist die Funktion $\omega(X, Y)$ für zwei beliebige Vektorfelder in der naheliegenden Weise definiert als

$$\omega(X, Y)(x) := \omega(X(x), Y(x)) \quad \forall x \in \Pi.$$

(ii) In Koordinaten $x = (q, p)$ gilt

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j}.$$

Satz (Eigenschaften der POISSON-Klammer). (i) Bilinearität

(ii) Antikommutativität

(iii) Jacobi-Identität

(iv) „Produktregel“

Beweis. Nachrechnen.

QED.

Bemerkung. (i) Die Jacobi-Identität hat zur Folge, dass mit zwei Erhaltungsgrößen auch deren Poisson-Klammer erhalten ist.

(ii) Eine weitere sehr nützliche Eigenschaft der Poissonklammer ist, dass man die zeitliche Entwicklung einer (glatten) Funktion $g : \Pi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto g(x, t)$ wie folgt schreiben kann:

$$\frac{dg}{dt} = \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

5 Kanonische Transformationen

Wir werden uns im folgenden sehr stark für Koordinaten-Transformationen interessieren, d.h. bijektive Abbildungen zwischen Sätzen von Koordinaten. Der allgemeinste Fall ist dabei, dass die neuen Koordinaten (Q, P) beide von q, p, t abhängen, d.h.

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i(q, p, t) \\ p_i &\mapsto P_i = P_i(q, p, t). \end{aligned}$$

Aufgrund der Umkehrbarkeit der Transformation können wir auch die q_i und p_i mithilfe von P, Q, t ausdrücken, und erhalten auf diese Weise eine (glatte) Funktion K , durch

$$K(Q, P, t) := H(q(Q, P), p(Q, P), t).$$

Allerdings interessieren uns nur bestimmte Transformationen, nämlich solche, die die Form der HAMILTON-Gleichungen erhalten, was man häufig mit „Invarianz der HAMILTON-Gleichungen“ umschreibt. Wir fordern also, dass jede Bahnkurve $(q(t), p(t))$ des Systems, die ja bekanntlich (*) genügt, in den neuen Koordinaten wiederum die HAMILTON-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{aligned}$$

erfüllt. Solche Transformationen werden als kanonisch bezeichnet.

Bemerkung. Diese Definition ist nicht die ganze Wahrheit. Man kann noch allgemeinere Transformationen betrachten, bei denen auch die Hamilton-Funktion K beliebig gewählt ist und nicht durch $K = H \circ \Phi^{-1}$. Dann ist diese Definition allerdings nicht ausreichend, weil es Transformationen gibt, die die Hamilton-Gleichungen invariant lassen, aber **nicht** kanonisch im Sinne von *die symplektische Struktur erhaltend* sind (Beispiel: $P = 2p, Q = q$). Das ist zugleich die exakte Definition (siehe unten).

Wir betrachten hier nur Transformationen, bei denen $K = H \circ \Phi^{-1}$ gilt.

Beispiel. (i) Ein Spezialfall sind die sogenannten Punkttransformationen aus der LAGRANGE-Mechanik:

$$q_i \mapsto Q_i = Q_i(q, t) \quad p_i \mapsto P_i := \frac{\partial L}{\partial Q_i}.$$

Das entspricht einem Übergang von einem Satz generalisierter Koordinaten zu einem anderen. Diese Transformationen lassen die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art forminvariant.

(ii) In dieser Sprache der Phasenraum-Koordinaten sind q und p völlig gleichberechtigt (im Gegensatz zu q und \dot{q} !). Die Transformation

$$Q := -p \quad P := q$$

ist nämlich kanonisch.

Beweis. Durch Nachrechnen. Die transformierte HAMILTON-Funktion lautet

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial Q_i} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}}_{=\dot{q}_j = -\delta_{ij}} = -\dot{q}_i = -\dot{P}_i \\ \frac{\partial K}{\partial P_i} &= \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{=-\dot{p}_j = \delta_{ij}} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial P_i}}_{=\delta_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial P_i}}_{=0} = -\dot{p}_i = -(-\dot{Q}_i) = \dot{Q}_i \end{aligned}$$

QED.

Der folgende Satz demonstriert die Tragweite unseres Formalismus und stellt zugleich den herausragenden Zusammenhang zwischen den kanonischen Transformationen und den symplektischen Abbildungen dar. Dieser Punkt ist somit die Nahtstelle, an der der mathematische Kalkül und die physikalische Anschauung sich vereinigen.

Satz. Eine Transformation $\Phi : x \leftrightarrow Y$ ist genau dann kanonisch, wenn die JACOBI-Matrix $T = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right)$ der symplektischen Gruppe angehört, d.h.

$$T^T I T = I$$

gilt.

Beweis (Nur für zeitunabhängige Transformationen Φ).

Zeitunabhängig bedeutet, dass

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 2n$$

gilt. Als erstes ist zu bemerken, dass wir uns weiter oben schon überlegt haben, dass

$$T^T I T = I \iff T I T^T = I$$

gilt. In den alten Koordinaten gelte die Hamilton-Gleichung

(a)
$$\dot{x} = I \partial_x H.$$

Es gilt (wir benutzen hier die Zeitunabhängigkeit)

$$\dot{Y}_i = \frac{d}{dt} Y_i(x) = \sum_j \underbrace{\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}}_{T_{ij}} \dot{x}_j + \underbrace{\frac{\partial Y_i}{\partial t}}_{=0}$$

also

(b)
$$\dot{Y} = T \dot{x}.$$

Die Hamilton-Funktion ist gegeben durch

$$K(Y) = H(x).$$

Mithin gilt

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial K(Y)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial K(Y)}{\partial Y_j} \underbrace{\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}}_{T_{ji}} = \sum_j T_{ij}^T \frac{\partial K(Y)}{\partial Y_j},$$

also ist

(c)
$$\frac{\partial H}{\partial x} = T^T \frac{\partial K}{\partial Y}.$$

Daher haben die Hamilton-Gleichungen in den neuen Koordinaten die folgende Gestalt

$$\dot{Y} \stackrel{b}{=} T \dot{x} \stackrel{a}{=} T I \frac{\partial H}{\partial x} \stackrel{c}{=} T I T^T \frac{\partial K}{\partial Y} \stackrel{!}{=} I \frac{\partial K}{\partial Y}.$$

Daher ist die Transformation genau dann kanonisch, wenn

$$T I T^T = I$$

erfüllt ist, d.h., wenn T^T symplektisch ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn T es ist. **QED.**

Bemerkung. Der Satz gilt auch für zeitabhängige Transformationen, allerdings ist der Beweis recht technisch und benutzt die Erzeugenden, die wir aus Zeitgründen nicht besprechen.

II Symplektische Struktur des Phasenraums II

1 Mathematische Vorbereitungen

Sei X ein topologischer Raum. Eine n -dimensionale (lokale) Karte auf $U \subseteq X$ ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq X$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen sind. U heißt Kartengebiet und die Karte wird mit (U, φ) bezeichnet. Für zwei Karten $(U, \varphi), (U', \varphi')$ auf X heißt die Abbildung

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

Kartenwechsel von φ nach φ' . Dies ist eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Man bezeichnet die Komponenten von $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ als (lokale) Koordinaten von p . Zwei Karten $(U, \varphi), (U', \varphi')$ auf X heißen verträglich, falls der Kartenwechsel φ nach φ' ein Diffeomorphismus ist (d.h. unendlich oft differenzierbar und umkehrbar mit einer unendlich oft differenzierbaren Umkehrfunktion). Ein Atlas \mathcal{A} von M ist eine Familie von verträglichen Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, wobei $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung von M ist.

Eine Karte (U, φ) heißt verträglich mit dem Atlas \mathcal{A} , falls sie mit jeder Karte von \mathcal{A} verträglich ist.

Zwei Atlanten \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 heißen verträglich, falls jede Karte von \mathcal{A}_1 mit \mathcal{A}_2 verträglich ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Atlanten, und wir können nach dieser Relation faktorisieren. Eine Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ von Atlanten heißt differenzierbare Struktur auf M .

Eine Mannigfaltigkeit M ist ein HAUSDORFFScher und separabler Raum versehen mit einer differenzierbaren Struktur.

Wir werden im folgenden unter einer Mannigfaltigkeit ein geometrisches Objekt verstehen, das sich lokal durch Karten beschreiben lässt. Der abstrakte Aufwand ist jedoch nötig, um die Definition sauber zu fassen und Unabhängigkeit von der Wahl des Atlanten zu gewährleisten.

Beispiel (Kreis). Wir betrachten $M := \mathbb{S}^1$ (Rand des Einheitskreises um 0). Dabei handelt es sich um eine Mannigfaltigkeit, denn man erhält unter Verwendung der stereographischen Projektion einen Atlas aus zwei Karten.

Satz. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und für $c \in \text{Im}(f)$ sei für alle $x \in f^{-1}(c) : f'(x) \neq 0$. Dann ist $M := f^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit (genauer: eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n).

Beispiel. (i) Mithilfe dieses Kriteriums erhält man sehr schnell, dass der Kreis aus dem vorhergehenden Beispiel eine Mannigfaltigkeit ist: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$ und $c = 1$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes.

(ii) Hat man ein mechanisches System anhand von holonomen Zwangsbedingungen vorgegeben, so ist der Konfigurationsraum (meistens) eine Mannigfaltigkeit, die sogenannte Konfigurationsmannigfaltigkeit.

(iii) Im Falle anholonomer Bindungen wird man im allgemeinen Mannigfaltigkeiten mit Rand erhalten.

Falls man mittels zweier (verträglicher) Karten (U, φ) und (U', φ') auf M zwei Sätze von Koordinaten auf $U \cap U'$ gegeben hat, nämlich

$$\varphi(m) = (x_1, \dots, x_n) \text{ und } \varphi'(m) = (y_1, \dots, y_n),$$

so kann man nach Wunsch zwischen diesen wechseln, indem man (z.B.) auf (x_1, \dots, x_n) den Kartenwechsel $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ anwendet. Diese mathematische Formalität führt man (intuitiv) jedes

Mal durch, wenn man Koordinaten wechselt. Wir wollen diese Bemerkung an einem wohlbe-
 kannten Beispiel demonstrieren.

Beispiel (Kartesische und Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2). Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2$. Dann sind durch (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) , wobei

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^2 & \varphi_1 &= \text{id} \\ U_2 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \varphi_2(x, y) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right), \end{aligned}$$

zwei (verträgliche) Karten gegeben. Hat man einen Punkt $p \in U_1 \cap U_2$ in kartesischen Koordi-
 naten $\varphi_1(p) = (x, y)$ vorgegeben, so erhält man daraus die Polarkoordinaten (r, ψ) wie folgt:

$$(r, \psi) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right).$$

Andersherum gelangt man von den Polarkoordinaten $\varphi_2(p) = (r, \psi)$ von p wie folgt zu den
 kartesischen Koordinaten des Punktes:

$$(x, y) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(r, \psi) = (r \cos(\psi), r \sin(\psi)).$$

Bei der Betrachtung von Kurven auf Mannigfaltigkeiten wird man sich für Tangentialvektoren
 in bestimmten Punkten interessieren, die als "Geschwindigkeitsvektoren" interpretierbar sein
 sollten. Da man im Allgemeinen keinen umgebenden Vektorraum zur Verfügung hat und die
 Mannigfaltigkeit selbst keine lineare Struktur besitzt, kann man eine solche Konstruktion nicht
 über die üblichen Grenzwertbildungen durchführen. Stattdessen führt man auf der Menge der
 glatten Kurven durch $m \in M$ wie folgt eine Äquivalenzrelation ein: für zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = m$ gelte

$$(\gamma_1 \sim \gamma_2) :\Leftrightarrow \left(\frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma_1(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma_2(t) \Big|_{t=0} \right),$$

wobei (U, φ) eine lokale Karte um m bezeichnet. Die Äquivalenzklassen bzgl. \sim bezeichnet
 man als Tangentialvektoren an m . Die Menge der Äquivalenzklassen von Kurven in m wird
 mit

$$T_m M$$

bezeichnet und heißt Tangentialraum an m . Diesen kann man vermittels der Abbildung

$$[\gamma] \mapsto \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma(t) \Big|_{t=0}$$

mit einer zu \mathbb{R}^n isomorphen Vektorraumstruktur versehen. Anschaulich wird dabei ein Exem-
 plar des \mathbb{R}^n am Punkte $m \in M$ angeheftet; genauer: $T_m M = \{m\} \times \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten als nächstes die Vereinigung

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M$$

aller Tangentialräume $T_m M$ – das Tangentialbündel. TM besitzt selbst die Struktur einer dif-
 ferenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ (das kann man durch Angabe eines Atlas
 zeigen).

Bemerkung. Falls M die Konfigurationsmannigfaltigkeit ist, so ist dieser Raum von großem
 Interesse, denn hier spielt sich die LAGRANGESche Mechanik ab.

Analog zum Tangentialbündel konstruiert man einen weiteren wichtigen Raum, der sich als Phasenraum der Hamilton Mechanik herausstellen wird. Ausgangspunkt sind hier die zu den $T_m M$ dualen Vektorräume $T_m^* M$, $m \in M$. Ihre Vereinigung

$$T^*M := \bigcup_{m \in M} T_m^* M$$

besitzt ebenfalls die Struktur einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit und wird als Kotangentialbündel bezeichnet.

2 Heuristische Vorbetrachtungen/Motivation

Bisher wurde, wie in praktisch allen Einführungen in die Hamilton Mechanik, so getan, als ob der Phasenraum eines mechanischen Systems die Struktur eines Vektorraums hätte. Dies reduziert den mathematischen Aufwand enorm und ist auch durchaus angemessen, solange man sich nur für die rechnerische Behandlung konkreter Systeme interessiert. Insofern geht es bei der inhaltlich korrekteren Formulierung der Hamilton Mechanik mit ihren wesentlich abstrakteren Begriffsbildungen auch nicht in erster Linie darum, in Bezug auf diese konkreten Problemtypen weiter zu kommen. Die Motivation besteht eher darin, dass auf dieser Ebene ein höheres Verständnis der inneren Struktur der klassischen Mechanik möglich wird, die zudem in formaler Hinsicht viele Parallelen zur Quantenmechanik aufweist.

Ausgangspunkt für die allgemeine Formulierung der Hamilton Mechanik ist der durch die Koordinaten der Lagrange Mechanik gegebene Konfigurationsraum Q , der die Struktur einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit trägt (n ist die Zahl der Freiheitsgrade). Die Zeitableitungen \dot{q}_i , also die verallgemeinerten Geschwindigkeiten, entsprechen in natürlicher Weise Tangentialvektoren an Q . Der Raum aller möglichen Geschwindigkeiten an einer bestimmten Stelle $\mathbf{q} \in Q$ ist daher der Tangentialraum $T_{\mathbf{q}}Q$. Indem man die Geschwindigkeiten als eigenständige Koordinaten auffasst und die Vereinigung aller Tangentialräume $T_{\mathbf{q}}Q$ betrachtet, erhält man das Tangentialbündel TQ , das seinerseits wieder eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ und der Raum ist, auf dem sich die Lagrange Mechanik abspielt. Die Lagrangefunktion ist somit eine Funktion auf dem Tangentialbündel. Der Übergang von der Lagrange- zur Hamiltonfunktion mittels der Legendre-Transformation entspricht nun dem Übergang vom Tangentialbündel TQ zum Kotangentialbündel T^*Q , das analog konstruiert wird und ebenfalls die Struktur einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit trägt.

Diese Objekte tragen global im Allgemeinen keineswegs die Struktur eines \mathbb{R}^{2n} oder einer offenen Teilmenge davon, lokal ist das aber durchaus der Fall. Ihre Beschreibung und konkrete Rechnungen erfolgen daher in Sätzen lokaler Koordinaten, wo die verschiedenen Beziehungen dann auch wieder die altbekannte Form annehmen, beispielsweise die Hamiltonschen Gleichungen. Man sollte sich aber darüber im klaren, dass bei der abstrakteren Betrachtungsweise, die wir hier einführen, z.B. der Phasenraum und sonstige Objekte einen eher geometrischen Charakter besitzen und unabhängig von ihrer Beschreibung durch bestimmte nicht eindeutige Koordinaten existieren.

Wir werden uns nun mit der Frage beschäftigen, wie man von der Hamiltonfunktion zu einem Vektorfeld gelangt, dessen Integralkurven gerade die physikalisch 'richtigen' Lösungskurven des mechanischen Systems sind. Der Schlüssel ist eine bestimmte geometrische Struktur, die für die Zwecke der Hamilton Mechanik besonders 'natürlich' ist und die uns an früherer Stelle

schon begegnet ist, allerdings in der Form, die sie bei der Beschreibung mittels lokaler Koordinaten annimmt.

3 Die Symplektische Form ω^2

Eine symplektische Struktur auf einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine geschlossene, nicht entartete 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$, wobei die Nichtentartung bedeutet, dass die 2-Form an jeder Stelle eine nichtentartete Bilinearform ist, d.h. dass die Bilinearformen

$$\omega_m : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}, \quad m \in M,$$

nicht entartet sind. Das Tupel (M, ω) heißt symplektische Mannigfaltigkeit, falls M eine Mannigfaltigkeit und ω eine darauf definierte symplektische Struktur ist.

Mithilfe von ω lässt sich leicht eine $2n$ -Form Ω_ω konstruieren, die nirgends verschwindet, also eine Volumenform auf M :

$$\Omega_\omega := \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_n$$

Die Mannigfaltigkeiten, die in der Hamilton Mechanik als Phasenräume in Erscheinung treten, sind von einer besonderen Bauart. Sie sind die Kotangentialbündel der zugrunde liegenden Konfigurationsmannigfaltigkeit und haben damit insbesondere eine geradzahlige Dimension. Es ist wesentlich, dass sich auf Mannigfaltigkeiten dieses Typs stets eine symplektische Form in einer kanonischen Art und Weise definieren lässt (nämlich als äußere Ableitung der sogenannten kanonischen 1-Form).

4 Kanonische Transformationen, Volumenerhaltung

Die Kanonizität von Abbildungen zwischen symplektischen Mannigfaltigkeiten kann nun über die eben eingeführte geometrische Struktur definiert werden. Eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen symplektischen Mannigfaltigkeiten (M, ω) und (N, ρ) heißt symplektisch oder kanonisch, falls sie die symplektische Struktur in folgendem Sinne erhält:

$$\omega_m(v, v') = \rho_{F(m)}(F'(m)v, F'(m)v') \quad \text{für } m \in M, \quad v, v' \in T_m M.$$

F' bezeichnet dabei die Ableitung von F . Im Rahmen des Differentialformenkalküls auf Mannigfaltigkeiten ist leicht zu sehen, dass derartige Transformationen mit ω^2 auch die von ω^2 induzierte Volumenform Ω_M erhalten. In diesem Sinne sind kanonische Transformationen volumenerhaltend.

5 HAMILTONSches Vektorfeld

Eine nichtentartete Bilinearform $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf natürliche Weise einen Isomorphismus $\omega^b : V \rightarrow V^*$ gemäß

$$\langle \omega^b(v), v' \rangle := \omega(v, v') \quad \text{für } v, v' \in V.$$

Die Umkehrfunktion von ω^b bezeichnet man mit ω^\sharp . Für 2-Formen ω , die auf einer Mannigfaltigkeit M definiert sind, hat man an jeder Stelle $m \in M$ eine Bilinearform $\omega_m : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}$ und, falls ω nicht entartet ist, einen Isomorphismus $\omega_m^b : T_m M \rightarrow T_m^* M$ bzw. einen Isomorphismus $\omega^\sharp : T_m^* M \rightarrow T_m M$. Damit macht eine 2-Form aus einer gegebenen 1-Form (deren Wert an jeder Stelle $m \in M$ ein Kotangentialvektor aus $T_m^* M$ ist) ein Vektorfeld (dessen Wert

an jeder Stelle ein Tangentialvektor aus $T_m M$ ist).

In unserem speziellen Fall interessiert uns das sogenannte Hamiltonsche Vektorfeld X_H , das die symplektische Form ω^2 in der oben beschriebenen Weise aus dem Differential der Hamiltonfunktion H erzeugt:

$$X_H := -\omega^\sharp(dH).$$

Man kann dies auch so ausdrücken: Für das Vektorfeld X_H wird gefordert, dass an allen Stellen $m \in M$ und für alle Tangentialvektoren $v \in T_m M$ gilt:

$$dH_m v = \omega(X_H(m), v).$$

Dabei ist dH_m der Wert der 1-Form dH an der Stelle m , also eine Linearform auf dem Tangentialraum $T_m M$. Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Vektorfeldes folgen aus der Nichtentartung von ω .

Die Differentialgleichungen für die Integralkurven von X_H sind in geeigneten lokalen Koordinaten ausgedrückt gerade die altbekannten Hamiltonschen Gleichungen. Die obige Konstruktion wurde übrigens ohne irgendwelchen weiteren Anforderungen an H durchgeführt, d.h. sie ist für beliebige Funktionen aus $C^\infty(M)$ sinnvoll.

6 POISSON-Klammern

Für zwei Funktionen $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die POISSON-Klammer von F und G als

$$\{F, G\} := \omega(X_F, X_G) : M \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei X_F, X_G die zu F bzw. G gehörigen HAMILTONSchen Vektorfelder sind. Diese Schreibweise ist natürlich folgendermaßen zu lesen: Für beliebige $m \in M$ gilt

$$\{F, G\}(m) = \omega(X_F(m), X_G(m)).$$

In geeigneten lokalen Koordinaten und mit der symplektischen Matrix I kann man die Poissonklammer so schreiben:

$$\{F, G\} = -(\partial_x F)^T I (\partial_x G)$$

Dies ist lediglich eine etwas kompaktere Form der z.B. in der Vorlesung benutzten Notation. Die Poisson-Klammern erlauben es, die Zeitableitung von Funktionen $F(\gamma(\cdot)) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F \in C^\infty(M)$ und einer Integralkurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ des Hamiltonschen Vektorfeldes X_H auf die folgende Art und Weise zu schreiben:

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \{H, F\}(\gamma(t)),$$

kurz

$$\dot{F} = \{H, F\}.$$

Insbesondere ist $F \in C^\infty(M)$ genau dann eine Bewegungskonstante, wenn $\{H, F\} \equiv 0$. Die Hamiltonschen Differentialgleichungen nehmen mit dieser Schreibweise folgende symmetrische Gestalt an:

$$\dot{q}^i = \{H, q^i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}.$$

Dies ist auch insofern zu begrüßen, als damit verdeutlicht wird, dass in der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik kein konzeptioneller Unterschied zwischen Koordinaten und Impulsen besteht. Sie sind gleichberechtigte Größen, die den Zustand des mechanischen Systems charakterisieren.

7 LIOUVILLE-Theorem

Die lokalen Diffeomorphismen $\Phi_t : M \rightarrow M$ des Flusses von X_H kann man als kanonische Transformationen auffassen (dies ist wiederum im Rahmen des Differentialformenkalküls leicht zu sehen). Sie bilden den Zustand des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt auf den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt ab. Daraus folgt, dass das Phasenraumvolumen eines Hamiltonschen Systems invariant unter der Zeitentwicklung ist, denn kanonische Transformationen lassen die Volumenform Ω_M invariant. Dies ist insbesondere im Hinblick z.B. auf die statistische Mechanik von Bedeutung.

Literatur

- [1] Gerd Rudolph, Vorlesungen zur Mathematischen Physik, Teil 1: Mannigfaltigkeiten, Tensorfelder und Hamiltonsche Systeme, ITP Universität Leipzig
- [2] Alexander Altland, Theoretische Mechanik, Uni Köln
- [3] V.I. Arnold, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1988