

Igor P. Volobuev
Gerd Rudolph
Matthias Schmidt

Komplexe halbeinfache Lie-Algebren und einige ihrer Anwendungen in Eichfeldtheorien

Vorlesungsskriptum

Einleitung

Das vorliegende Vorlesungsskriptum basiert auf einer Serie von Spezialvorlesungen, die I.P. Volobuev im Wintersemester 1994/95 als Gast des NTZ am Institut für Theoretische Physik der Universität Leipzig gehalten hat. Der Hörerkreis setzte sich vor allem aus Diplomanden und Doktoranden zusammen. Einer der Hörer war Matthias Schmidt, der die Hauptarbeit bei der Verfassung dieses Skriptums geleistet hat.

Da der Begriff der Symmetrie in der gesamten Physik eine fundamentale Rolle spielt, entdecken wir gruppentheoretische Strukturen bereits bei sehr elementaren Betrachtungen – z.B. führt eine genauere Analyse der Newtonschen Grundgesetze zum Galileischen Relativitätsprinzip und damit zum Begriff der Galilei-Gruppe als Symmetriegruppe der klassischen Mechanik. Analog findet man die Poincarégruppe als Symmetriegruppe der speziellen Relativitätstheorie. Auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie spielen Symmetriebetrachtungen, z.B. beim Suchen von strengen Lösungen der Einstein-Gleichungen, eine grundlegende Rolle. Um nun Symmetrien von Quantensystemen zu beschreiben, hat man unitäre Darstellungen von Gruppen in Hilberträumen zu betrachten. Eine Symmetrie liegt vor, wenn der Hamiltonoperator des Systems invariant unter der Darstellung ist. Dies führt – für konservative Systeme – zu Erhaltungssätzen, die bei der Lösung quantenmechanischer Probleme extrem hilfreich sein können. Diese tiefen Sachverhalte wurden schon kurz nach der Entstehung der Quantenmechanik aufgedeckt und in den klassischen Monographien von van der Waerden (1932), Weyl (1931) und Wigner (1931) beschrieben. Prinzipiell kann man zwischen Raum-Zeit-Symmetrien und “inneren” Symmetrien unterscheiden. Die letzteren sind abstrakte Symmetrien von physikalischen Systemen, die nicht aus Raum-Zeit-Beziehungen herleitbar sind. In Analogie zum Spinbegriff (Pauli 1927) schlug Heisenberg 1932 das Konzept des Isospins vor, demzufolge Proton und Neutron zwei sich nur durch ihre Ladung unterscheidende Zustände eines $SU(2)$ -Isodubletts sind. Aus der Sicht der starken Wechselwirkung sind Proton und Neutron ununterscheidbar – die starke Wechselwirkung ist invariant unter “inneren $SU(2)$ -Drehungen”. Diese geniale Idee war der Ausgangspunkt für das auch heute noch grundlegende Ordnungsprinzip in der Welt der Elementarteilchen: Elementarteilchen bilden Multipletts bezüglich verschiedener (innerer) unitärer Symmetrien. 1961 schlugen Gell-Mann und Ne’eman die Flavour-Gruppe $SU(3)$ als neue Symmetriegruppe vor. Tatsächlich ließen sich in guter Näherung (was die Übereinstimmung ihrer Massen betrifft) die damals bekannten Hadronen in Multipletts der $SU(3)$ anordnen. Die bekanntesten Baryonen und Mesonen bilden jeweils ein Oktett, liegen also im Raum der adjungierten Darstellung der $SU(3)$. Bekanntlich kann man aber die adjungierte Darstellung aus den fundamentalen Darstellungen 3 und $\bar{3}$ der $SU(3)$ erzeugen. Dies legte die Hypothese nahe, daß die Hadronen zusammengesetzte Teilchen sind. Tatsächlich schlugen Gell-Mann und Zweig 1964 hypothetische Teilchen u , d und s (Quarks) vor, die sich nach der fundamentalen Darstellung 3 der $SU(3)$ transformieren sollten. Mesonen bestehen dann aus einem Quark-Antiquark-Paar und Baryonen aus drei Quarks. Allerdings bemerkte man sehr bald das folgende Problem: Geht man nach diesem Bauprinzip vor, so kann man gebundene Zustände erhalten, in denen 3 Fermionen mit denselben Quantenzahlen auftreten – was im Widerspruch zum Pauli-Prinzip steht. Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin (Greenberg 1964, Gell-Mann 1972), den Quarks eine weitere Quantenzahl zuzuordnen, die sogenannte Colour- oder Farbquantenzahl mit den Eigenwerten rot, gelb und blau. Man kann nun eine zusätz-

liche Colour- $SU(3)$ -Gruppe einführen und die Quarks wieder als Triplets in der fundamentalen Darstellung dieser Gruppe auffassen. Im Rahmen dieses Konzepts ist es leicht, vollständig antisymmetrische Wellenfunktionen (z.B. für das Ω -Hyperon) aufzuschreiben, die invariant unter dieser $SU(3)$ -Symmetrie sind und die das Pauli-Prinzip nicht verletzen.

Das eben beschriebene Konzept erwies sich als sehr geeignet für die Beschreibung der Spektren und statischen Eigenschaften von Mesonen und Baryonen, reichte jedoch nicht für die Behandlung dynamischer Probleme, z.B. hochenergetischer Streuprozesse, aus. Hierfür wurden in der Folgezeit zunächst verschiedene Modelle entwickelt. Doch Ende der sechziger, Anfang der siebziger Jahre setzte sich – gestützt durch eine Reihe neuer experimenteller Resultate – die Überzeugung durch, daß die schwache und die starke Wechselwirkung durch gewisse Vektorbosonen vermittelt werden, die eine ähnliche Rolle spielen, wie die Photonen in der QED. Damit entstanden die sogenannten Eichfeldtheorien, die Weinberg-Salam-Theorie (1967/68) für die elektro-schwache und die QCD (t’Hooft, Gross und Politzer 1972/73) für die starke Wechselwirkung. Die Grundlage für diese Theorien bildet das sogenannte Eichprinzip, das für nichtabelsche Gruppen von Yang und Mills 1954 formuliert wurde, (in Ansätzen aber bereits in früheren Arbeiten von Pauli und Weyl enthalten ist.) Ausgangspunkt für die Formulierung dieses Prinzips war die Überlegung, daß bei dynamischen Prozessen die bisher angenommene starre innere Symmetrie eigentlich physikalisch nicht gerechtfertigt ist. Wie Elemente eines Multipletts mit konkreten Teilchen (oder Feldern) identifiziert werden, wird lokal – und unter Umständen in verschiedenen Labors unterschiedlich – entschieden. Dies führt zum Konzept der lokalen inneren Symmetriegruppen, im Rahmen dessen die inneren Symmetrietransformationen von den Punkten der Raum-Zeit abhängen. Fordert man nun Invarianz der physikalischen Wirkung freier Materiefelder unter solchen Transformationen, so erzwingt dies die Einführung der bereits oben erwähnten Vektorbosonen, der sogenannten Eichbosonen, die über die kovariante Ableitung mit den Materiefeldern – und im nichtabelschen Falle auch mit sich selbst – gekoppelt sind. Auf diese Weise erhält man ein universelles Konstruktionsprinzip. Heute sind die Weinberg-Salam-Theorie und die QCD im sogenannten Standardmodell der Elementarteilchenphysik zusammengefaßt. Sicher genügt das Standardmodell aufgrund seiner großen Zahl unabhängiger Parameter (18 – falls man voraussetzt, daß die Neutrinomassen verschwinden) nicht den ästhetischen Ansprüchen, die man an ein Modell der “Unifizierung” eigentlich stellen sollte. Andererseits ist es heute in der Elementarteilchentheorie eines der wichtigsten Modelle für konkrete Rechnungen. Versuche, tieferliegende Unifizierungsideen – möglichst unter Einbeziehung der Gravitationswechselwirkung – zu realisieren sind trotzdem nach wie vor gefragt. Hierzu hat es mehrere wichtige Entwicklungslinien gegeben, aber es würde den Rahmen dieser Einleitung sprengen, wollte man sie alle hier besprechen. Die interessantesten Entwicklungen sind sicher mit den folgenden Ideen verknüpft: die Kaluza-Klein-Idee, die Idee der großen Unifizierung, die Idee der Supersymmetrie und die Idee der Strings. Trotz eines immensen Aufwandes hat bis heute keine dieser Richtungen eine befriedigende Theorie der Unifizierung der fundamentalen Wechselwirkungen geliefert. Bei den hier genannten theoretischen Entwicklungen haben nun – neben neuen geometrischen Konzepten – gruppentheoretische Methoden eine grundlegende Rolle gespielt. Man kann ohne Übertreibung sagen, daß hier praktisch alle klassischen Gruppen (selbst die exceptionellen) eingegangen sind. Da es zu den vorher besprochenen Methoden der unitären Symmetrie in der Elementarteilchenphysik eine große Zahl von Lehrbüchern gibt, haben wir uns entschlossen, diese Thematik hier nicht zu behandeln. Stattdessen besprechen wir eine Anwendung, die die oben erwähnte

Kaluza-Klein-Strategie mit der Idee der großen Unifizierung verknüpft. Wir beziehen uns dabei auf Originalarbeiten von Gerd Rudolph und Igor P. Volobuev.

Bei den meisten physikalischen Anwendungen spielt die globale (topologische) Struktur der Lie-Gruppe kaum eine Rolle, es genügt das Konzept der zugehörigen Lie-Algebra. Ausschließlich dieses wird hier behandelt.

Das Skriptum ist inhaltlich folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 1 geben wir einen kurzen Überblick über die Grundbegriffe der Theorie der Lie-Algebren, gehen auf charakteristische Eigenschaften halbeinfacher Lie-Algebren ein und diskutieren einige Beispiele. Im zweiten Kapitel (von da an beschäftigen wir uns nur noch mit komplexen halbeinfachen Lie-Algebren) wird die Wurzeltheorie behandelt und im 3. Kapitel stellen wir die Klassifizierung á la Dynkin dar. In Kapitel 4 besprechen wir kompakte Formen. Im fünften Kapitel wird auf die Darstellungstheorie eingegangen. Besonderes Gewicht liegt dabei auf der Klassifizierung der irreduziblen, der fundamentalen und der elementaren Darstellungen. In den Kapiteln 6 und 7 werden – in enger Anlehnung an die klassischen Resultate von Dynkin – halbeinfache Unteralgebren komplexer halbeinfacher Lie-Algebren behandelt. Der in Kapitel 6 diskutierte Fall allgemeiner, also auch nichtregulärer Einbettungen ist – im Gegensatz zum übrigen Material – in den gängigen Lehrbüchern kaum zu finden. In Kapitel 8 wird die Weyl-Gruppe untersucht. Schließlich diskutieren wir im letzten Kapitel ein Anwendungsbeispiel, das die Idee der großen Unifizierung mit der Kaluza-Klein-Idee verknüpft.

Es gibt viele Lehrbücher über Lie-Algebren. Sie lassen sich grob in zwei Klassen einteilen: einerseits die, die sich an Physiker wenden – diese bieten zwar schnellen Zugang zu wesentlichen Informationen, konzentrieren sich aber meist nur auf Standardresultate, wie z. B. die Konstruktion von Darstellungen durch Tensorprodukte – und andererseits die mathematisch streng aufgebauten, die viele sehr interessante Methoden enthalten, für Nicht-Mathematiker aber schwer zugänglich sind. Wir haben versucht, einen Kompromiß zu finden und einige wichtige Ergebnisse – z. B. die Wurzeltheorie und die Klassifizierung halbeinfacher Unteralgebren – klar und verständlich darzulegen.

Ziel der Vorlesung war es, zusammen mit den theoretischen Grundlagen auch praktische Fertigkeiten im Umgang mit den in der Eichtheorie relevanten Lie-Algebren zu vermitteln. Aus diesem Grunde wurde versucht, die behandelte Theorie immer wieder an einfachen, ausführlich erläuterten Beispielen transparent zu machen. Diese Beispiele, die wir ebenfalls in das Skriptum übernommen haben, bieten darüber hinaus reichlich Gelegenheit zum Üben.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	5
1.1	Algebren	5
1.2	Lie-Algebren	7
1.3	Besonderheiten halbeinfacher Lie-Algebren	15
1.4	Beispiele	17
	Einige klassische Lie-Algebren	17
	Ausgewählte Eigenschaften	19
	Die Lie-Algebren $su(2)$, $so(3)$ und $sl(2, \mathbf{C})$	22
	Die Lie-Algebren $su(3)$ und $sl(3, \mathbf{C})$	25
2	Wurzelstruktur	27
2.1	Cartan-Unteralgebren und Wurzeln	27
	Jordan-Zerlegung in einer halbeinfachen Lie-Algebra	27
	Cartan-Unteralgebren	28
	Wurzeln	29
	Äquivalente Charakterisierungen von Cartan-Unteralgebren im halbein- fachen Fall	29
2.2	Eigenschaften von Wurzelsystemen, Teil I	31
2.3	Gewichte und Wurzelfolgen	33
	Gewichte	33
	Darstellungen der Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$	34
	Wurzelfolgen	35
2.4	Eigenschaften von Wurzelsystemen, Teil II	36
	Beispiel: $sl(n + 1, \mathbf{C})$	37
2.5	Systeme einfacher Wurzeln	38
	Lexikografische Ordnung auf H_0^*	38
	Einfache Wurzeln	39
	Die Höhe einer Wurzel	40
	Die Cartan-Matrix	40
	Weyl-Chevalley-Basen	41
	Beispiel: $sl(n + 1, \mathbf{C})$	42
2.6	Die Weyl-Gruppe	42
	Weyl-Ebenen und Weyl-Kammern	42
	Die Weyl-Gruppe $Ad(\Sigma)$	43
	Der Zusammenhang zwischen SEW, Weyl-Kammern und $Ad(\Sigma)$	44
	Der Zusammenhang zwischen $Ad(\Sigma)$, $Aut(\Sigma)$ und $Aut(\pi)$	46
	Beispiele	47

2.7	Konjugation von Cartan-Unteralgebren	48
2.8	Die kompakte Form	49
	Reelle Formen und Anti-Automorphismen	49
	Die kompakte Form	49
3	Klassifizierung	51
3.1	π -Systeme und Dynkin-Diagramme	51
	π -Systeme	51
	Dynkin-Diagramme	52
	Irreduzible π -Systeme	52
	Beispiele: Cartan-Matrizen und Dynkin-Diagramme der klassischen halb- einfachen komplexen Lie-Algebren	54
3.2	Klassifizierung	57
3.3	Einige Daten der einfachen komplexen Lie-Algebren	61
4	Darstellungen	67
4.1	Grundlagen	67
4.2	Irreduzible Darstellungen	68
	Eigenschaften	69
	Der Satz von Weyl	70
	Klassifizierung	71
	Beispiele	72
4.3	Fundamentale und elementare Darstellungen	74
	Fundamentale Darstellungen	74
	Elementare Darstellungen	75
	Beispiele	76
4.4	Zur Struktur von Darstellungen	78
	Index	78
	Quadratischer Casimir-Operator	79
	Dimensionsformel von Weyl	80
	Beispiele	80
5	Halbeinfache Unteralgebren	81
5.1	Äquivalenz und lineare Äquivalenz	81
5.2	Die Methode der definierenden Darstellungen	82
	Definierende Darstellungen	82
	Konstruktion von Einbettungen	84
	Beispiele	85
5.3	Indizes einfacher Unteralgebren	86
5.4	Reguläre halbeinfache Unteralgebren	86
	Reguläre Unteralgebren	87
	π -Systeme in einem Wurzelsystem	88
	Erweiterte π -Systeme	89
	Klassifizierung der regulären halbeinfachen Unteralgebren	90
	Beispiele	92

6 Anwendungen in Eichfeldtheorien	93
6.1 Das $SU(5)$ -Modell	93
6.2 Das $SU(5) \times U(1)$ -Modell	97
Dimensionsreduktion und Modellbildung	98
Konstruktion von angepaßten Basen	101
Das $SU(5) \times U(1)$ -Modell	105
Anhang	111
Literaturverzeichnis	117
Bezeichnungen und Symbole	119
Index	121

Kapitel 1

Grundbegriffe

Dieses Kapitel soll die wichtigsten Grundbegriffe und Notationen bereitstellen, die im weiteren gebraucht werden.

Gewisse Eigenschaften algebraischer Strukturen sind unabhängig davon, um welche Struktur es sich konkret handelt. Viele der im folgenden an Algebren und Darstellungen von Algebren untersuchten Begriffe, Konstruktionen und Fragestellungen haben daher ihre Wurzeln in einem viel allgemeineren Kontext. Um diesen Aspekt zu betonen, verwenden wir nach Möglichkeit einheitliche Bezeichnungen für einander entsprechende Objekte in verschiedenen algebraischen Strukturen, wie zum Beispiel *Morphismus* für strukturerhaltende Abbildungen $f : X \rightarrow X$ sowie daraus abgeleitet Isomorphismus (f ist bijektiv und f^{-1} ist auch Morphismus), Endomorphismus (Morphismus von X auf sich selbst) und Automorphismus (Isomorphismus von X auf sich selbst). Was "strukturerhaltend" konkret heißen soll, muß man natürlich für jede algebraische Struktur einzeln definieren.

Der Buchstabe \mathbb{K} bezeichne einen Körper. Wir beschränken unsere Betrachtungen durchweg auf die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Algebren

Definition Eine \mathbb{K} -Algebra (oder "Algebra über \mathbb{K} ") ist ein \mathbb{K} -Vektorraum \mathcal{A} , versehen mit einer bilinearen Abbildung ("Multiplikation") $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen Algebren \mathcal{A} , \mathcal{B} heißt *Morphismus von Algebren*, falls sie linear ist und $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$ erfüllt. Als Dimension einer Algebra nimmt man die Dimension des unterliegenden Vektorraumes.

Hat die Multiplikation spezielle Eigenschaften, ist sie z. B. assoziativ oder kommutativ, so bezeichnet man auch die Algebra mit dem entsprechenden Adjektiv, z. B. als assoziative oder kommutative Algebra.

Beispiele

(1) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Die Endomorphismen $\text{End}(V)$ mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation bilden eine assoziative \mathbb{K} -Algebra der Dimension $\dim(V)^2$. $\text{End}(V)$ ist kommutativ gdw. $\dim(V) = 1$.

(2) Viele Funktionenräume, zum Beispiel die stetigen \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum oder die Polynome in einer oder mehreren \mathbb{K} -Variablen tragen die

Struktur einer assoziativen und kommutativen Algebra, wenn man Addition und Multiplikation punktweise erklärt. Algebren dieser Art sind im allgemeinen unendlichdimensional.

(3) Beispiele für nichtassoziative Algebren sind unter anderem die Lie-Algebren.

Unteralgebren Eine Unteralgebra der Algebra \mathcal{A} ist ein Paar (\mathcal{B}, j) , bestehend aus einer Algebra \mathcal{B} und einem injektiven Algebren-Morphismus ("Einbettung") $j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Diese Begriffsbildung ist mit der Vorstellung von einer Unteralgebra als Teilmenge verträglich: eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ist Unteralgebra, falls \mathcal{B} bezüglich der von \mathcal{A} induzierten Operationen abgeschlossen ist (genau dann ist nämlich die identische Einbettung ein Morphismus).

Kern und Bild Sei $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Morphismus von Algebren. Der Kern von f ist die Unteralgebra $\ker f := \{x \in \mathcal{A} : f(x) = 0\}$ von \mathcal{A} . Das Bild von f ist die Unteralgebra $\text{im} f := f(\mathcal{A})$ von \mathcal{B} . Der Morphismus f ist injektiv gdw. $\ker f = \{0\}$ und surjektiv gdw. $\text{im} f = \mathcal{B}$.

Ideale Eine Unteralgebra \mathcal{I} in der Algebra \mathcal{A} heißt Links- (bzw. Rechts- bzw. zweiseitiges) Ideal, falls $\mathcal{A} \cdot \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ (bzw. $\mathcal{I} \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ bzw. beides) gilt.

Jede Algebra \mathcal{A} enthält zwei triviale zweiseitige Ideale: \mathcal{A} und $\{0\}$.

Sei \mathcal{I} ein zweiseitiges Ideal in \mathcal{A} . Die *Faktoralgebra* \mathcal{A}/\mathcal{I} ist die Menge der Äquivalenzklassen von \mathcal{A} bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{I}$, versehen mit den Operationen $\lambda[x] + [y] := [\lambda x + y]$, $[x] \cdot [y] := [x \cdot y]$ $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Beispiel: Der Kern eines Morphismus $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist immer ein zweiseitiges Ideal in \mathcal{A} . Es gilt

$$\mathcal{A}/\ker f \cong \text{im} f,$$

wobei der Isomorphismus durch die Abbildung $[x] \mapsto f(x)$ gegeben ist.

Zentralisator Sei \mathcal{B} eine Teilmenge der Algebra \mathcal{A} . Die Menge

$$Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{A} : x \cdot y = y \cdot x \quad \forall y \in \mathcal{B}\}$$

heißt Zentralisator von \mathcal{B} in \mathcal{A} . $Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ ist eine Unteralgebra von \mathcal{A} . Den Zentralisator $Z(\mathcal{A}) := Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ nennt man *Zentrum* von \mathcal{A} . Das Zentrum ist eine kommutative Unteralgebra.

Direkte Summe und Tensorprodukt Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Algebren über demselben Körper. Die direkte Summe $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ erhält man, indem man die direkte Summe der unterliegenden Vektorräume bildet und mit der folgenden Multiplikation versieht:

$$(x_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}}) \cdot (y_{\mathcal{A}}, y_{\mathcal{B}}) := (x_{\mathcal{A}} \cdot y_{\mathcal{A}}, x_{\mathcal{B}} \cdot y_{\mathcal{B}}) \quad \forall x_{\mathcal{A}}, y_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}, x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Analog konstruiert man das Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ als Tensorprodukt der unterliegenden Vektorräume und definiert darauf eine Multiplikation durch

$$(x_{\mathcal{A}} \otimes x_{\mathcal{B}}) \cdot (y_{\mathcal{A}} \otimes y_{\mathcal{B}}) := (x_{\mathcal{A}} \cdot y_{\mathcal{A}}) \otimes (x_{\mathcal{B}} \cdot y_{\mathcal{B}}) \quad \forall x_{\mathcal{A}}, y_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}, x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Komplexifizierung Praktisch gesehen, erhält man die Komplexifizierung eines reellen Vektorraumes V als die komplexe lineare Hülle irgendeiner Basis in V . Formalisieren kann man diese Vorstellung dadurch, daß man die komplexen Zahlen \mathbb{C} als (zweidimensionalen) reellen Vektorraum auffaßt und die Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$ als das reelle Tensorprodukt $\mathbb{C} \otimes V$ definiert, wobei man anstelle der skalaren Multiplikation mit reellen Zahlen eine skalare Multiplikation mit komplexen Zahlen durch

$$z(z' \otimes v) := (zz') \otimes v \quad \forall z \in \mathbb{C}, z' \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$$

(und lineare Fortsetzung) erklärt. Auf analoge Weise erhält man die Komplexifizierung $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ einer reellen Algebra \mathcal{A} , indem man \mathbb{C} als reelle Algebra auffaßt, das reelle Tensorprodukt $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}$ von Algebren bildet und mit der angegebenen Multiplikation mit komplexen Skalaren versieht. Auch dies ist nur die Formalisierung dessen, daß eine Basis in \mathcal{A} auch eine (komplexe) Basis in $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ ist und für die Produkte der Basiselemente in \mathcal{A} wie in $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ dieselben Relationen gelten.

Hat man andererseits eine komplexe Algebra \mathcal{B} gegeben, so nennt man jede reelle Algebra \mathcal{A} mit $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}$ eine *reelle Form* von \mathcal{B} .

Graduierungen und Filtrationen Eine Graduierung der Algebra \mathcal{A} ist eine Folge $\{\mathcal{A}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ von Unterräumen mit den Eigenschaften

$$(1) \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_k = \mathcal{A} \quad (2) \mathcal{A}_k \cdot \mathcal{A}_l \subseteq \mathcal{A}_{k+l}.$$

Eine Filtration von \mathcal{A} ist eine Folge $\{\mathcal{A}_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ von Unterräumen mit den Eigenschaften

$$(1) \mathcal{A}_{(n)} \subseteq \mathcal{A}_{(m)}, \text{ falls } n \leq m \quad (2) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{(n)} = \mathcal{A} \quad (3) \mathcal{A}_{(n)} \cdot \mathcal{A}_{(m)} \subseteq \mathcal{A}_{(n+m)}.$$

Man beachte, daß sich die Unterräume \mathcal{A}_k einer Graduierung nur in $\{0\}$ schneiden, während jeder Unterraum $\mathcal{A}_{(n)}$ einer Filtration alle vorangegangenen enthält.

Zu einer Graduierung $\{\mathcal{A}_k : k \in \mathbb{Z}\}$ auf natürliche Weise assoziiert ist die Filtration

$$\{\mathcal{A}_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{A}_{(n)} := \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k| \leq n}} \mathcal{A}_k.$$

Derivationen Derivationen der Algebra \mathcal{A} sind lineare Abbildungen $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, die die Produktregel $d(x \cdot y) = (dx) \cdot y + x \cdot (dy)$ erfüllen. Die Menge der Derivationen bezeichnen wir mit $\text{Der}(\mathcal{A})$. $\text{Der}(\mathcal{A})$ ist ein Unterraum, aber im allgemeinen keine Algebra. Es trägt jedoch die Struktur einer Lie-Algebra (siehe dazu Beispiel (3) zur Definition der Lie-Algebren im folgenden Abschnitt).

1.2 Lie-Algebren

Definition Eine \mathbb{K} -Lie-Algebra ist eine \mathbb{K} -Algebra, deren Multiplikation den Bedingungen

$$(1) x \cdot x = 0 \\ (2) x \cdot (y \cdot z) + y \cdot (z \cdot x) + z \cdot (x \cdot y) = 0 \quad (\text{„Jacobi-Identität“})$$

genügt.

Aus der Definition folgt unmittelbar $x \cdot y = -y \cdot x$ (berechne $(x + y) \cdot (x + y)$). Diese Rechenregel spielt in Lie-Algebren eine analoge Rolle wie das Kommutativgesetz in kommutativen Algebren. Aus ihr folgt zum Beispiel:

- Das Zentrum einer Lie-Algebra ist ein Ideal.
- Jedes Ideal in einer Lie-Algebra ist zweiseitig.

Die Jacobi-Identität hingegen ersetzt das Assoziativgesetz. Insbesondere ist eine Lie-Algebra nicht assoziativ (vorausgesetzt, ihr Produkt ist nicht identisch Null). Aus jeder assoziativen Algebra läßt sich aber eine Lie-Algebra machen, indem man die assoziative Multiplikation $x \cdot y$ durch den Kommutator

$$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$

ersetzt. Die ersten Lie-Algebren, die man untersucht hat, waren Unteralgebren von Algebren dieser Gestalt. Deshalb wird das Produkt in einer Lie-Algebra traditionell mit $[x, y]$ bezeichnet.

Beispiele

(1) Aus der assoziativen Algebra $\text{End}(V)$ der Endomorphismen eines \mathbb{K} -Vektorraumes erhält man nach obiger Bemerkung eine Lie-Algebra mit dem Kommutator als Produkt. Diese hat dieselbe Dimension wie $\text{End}(V)$, nämlich $\dim(V)^2$. Wir bezeichnen sie mit $gl(V)$, ("general linear") bzw., im Falle $V = \mathbb{K}^n$, mit $gl(n, \mathbb{K})$.

Die Bezeichnung gl weist auf einen fundamentalen geometrischen Zusammenhang zwischen Lie-Algebren und Lie-Gruppen hin: $gl(V)$ zum Beispiel ist die Linearisierung der Lie-Gruppe $GL(V)$ der Vektorraum-Automorphismen von V . Dieser Zusammenhang – den wir im weiteren weder untersuchen noch benutzen wollen – gestattet es, aus der Struktur linearer Objekte (der Lie-Algebren) Aussagen zumindest über die lokale Struktur nichtlinearer Objekte (der Lie-Gruppen) zu gewinnen. Das ist genau der Grund, warum Lie-Algebren in der Physik eine so wichtige Rolle spielen, denn primär sind eigentlich die Gruppen, die ja die Symmetrieeigenschaften eines physikalischen Systems verkörpern.

(2) Für beliebige $A, B \in gl(V)$ gilt $\text{tr}_V([A, B]) = 0$. Daher bildet die Menge $sl(V)$ ("special linear") der spurfreien Operatoren auf V ein Ideal in $gl(V)$. $sl(V)$ hat die Dimension $n^2 - 1$. Auch hier schreibt man $sl(n, \mathbb{K})$, falls $V = \mathbb{K}^n$.

(3) Sei \mathcal{A} eine beliebige Algebra. Der Kommutator zweier Derivationen von \mathcal{A} ist wieder eine Derivation. Damit ist $\text{Der}(\mathcal{A})$ eine Unteralgebra von $gl(\mathcal{A})$.

(4) In der Quantenmechanik arbeitet man mit den Drehimpulsoperatoren L_x, L_y, L_z , definiert durch $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ mit dem Impulsoperator $\vec{p} = -i\hbar\nabla$. Diese genügen der Kommutatorrelation

$$[L_x, L_y] = -i\hbar L_z \quad (*) \tag{1.1}$$

(und zyklische Vertauschungen). Der Vektorraum $\mathcal{L} := \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{i}{\hbar} L_x, \frac{i}{\hbar} L_y, \frac{i}{\hbar} L_z \right\}$ ist abgeschlossen unter der durch (1.1) definierten Multiplikation, bildet also eine Lie-Algebra der Dimension 3.

Daß sowohl in (1.1) als auch in der Definition von \mathcal{L} ein Faktor i steht, hat folgenden Grund: Die Operatoren der Quantenmechanik sind selbstadjungiert; der Kommutator von

selbstadjungierter Operatoren aber ist schiefadjungiert: $[A, B]^* = -[A^*, B^*] = -[A, B]$. Mit Hilfe des Faktors i kommt man nun von den selbstadjungierten zu den schiefadjungierten Operatoren ($A^* = -A$), welche unter Kommutatorbildung abgeschlossen sind.

(5) \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt als Multiplikation ist eine reelle Lie-Algebra. Diese ist isomorph zur Algebra der Drehimpulsoperatoren aus Beispiel (4): ein Isomorphismus wird zum Beispiel durch $e_x \mapsto \frac{i}{\hbar}L_x$, $e_y \mapsto \frac{i}{\hbar}L_y$, $e_z \mapsto \frac{i}{\hbar}L_z$ definiert (e_x, e_y, e_z seien die kanonischen Basisvektoren).

Strukturkonstanten Fixiert man in der Lie-Algebra \mathcal{L} eine Basis $\{b_k\}$, so sind die Strukturkonstanten C_{ij}^k definiert durch die Gleichung $[b_i, b_j] = \sum_k C_{ij}^k b_k$. Mit ihrer Hilfe kann man in Koordinaten rechnen: sind x^i, y^i die Koordinaten von x, y , so ergeben sich die Koordinaten von $[x, y]$ zu $\sum_{i,j} x^i y^j C_{ij}^k$. Die Antisymmetrie des Lie-Produkts spiegelt sich auf dem Niveau der Strukturkonstanten in der Relation $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ und die Jacobi-Identität in der Relation $C_{ij}^l C_{kl}^m + C_{jk}^l C_{il}^m + C_{ki}^l C_{jl}^m = 0$ wider. Man beachte, daß die Strukturkonstanten, entgegen ihrem Namen, keine Konstanten der Lie-Algebra sind, sondern von der gewählten Basis abhängen.

Einfache, halbeinfache, auflösbare und nilpotente Lie-Algebren Lie-Algebren kann man grob nach ihrer Idealstruktur einteilen, d. h. danach, was für Ideale sie enthalten und wie diese geschachtelt sind.

Eine *einfache* Lie-Algebra ist nicht kommutativ und besitzt überhaupt keine Ideale außer den trivialen. Um die anderen Klassen zu definieren, betrachten wir die rekursiv gegebenen Folgen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(n+1)} &:= [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}], & \mathcal{L}^{(0)} &:= \mathcal{L} & \text{("obere Zentralreihe")} \\ \mathcal{L}_{(n+1)} &:= [\mathcal{L}, \mathcal{L}_{(n)}], & \mathcal{L}_{(0)} &:= \mathcal{L} & \text{("untere Zentralreihe")}, \end{aligned}$$

die man unter dem Namen "abgeleitete Reihen" zusammenfaßt. Ihre Glieder sind Ideale in \mathcal{L} . \mathcal{L} heißt *auflösbar*, falls $\mathcal{L}^{(n)}$ für ein genügend großes n verschwindet und *nilpotent*, falls $\mathcal{L}_{(n)}$ dies tut. Schließlich nennt man eine Lie-Algebra *halbeinfach*, falls sie außer $\{0\}$ keine auflösbaren Ideale enthält.

Wir sehen:

- eine nilpotente Lie-Algebra ist auch auflösbar,
- eine einfache Lie-Algebra ist auch halbeinfach,
- $\{0\}$ ist die einzige Lie-Algebra, die gleichzeitig halbeinfach und auflösbar ist.

Die halbeinfachen Lie-Algebren (und insbesondere die einfachen) stellen also einen gewissen Gegenpol zu den auflösbaren und nilpotenten dar. Desweiteren ist klar, daß halbeinfache Lie-Algebren stets triviales Zentrum haben.

Beispiele: Die oberen Dreiecksmatrizen bilden eine auflösbare und die oberen Dreiecksmatrizen, deren Hauptdiagonale nur Nullen enthält, eine nilpotente Lie-Algebra. Die Lie-Algebra der Drehimpulsoperatoren aus Beispiel (4) zur Definition der Lie-Algebren ist einfach. Die Lie-Algebra $gl(V)$ ist für $\dim(V) \geq 2$ weder halbeinfach noch auflösbar.

Kompakte Lie-Algebren Eine Bilinearform B auf einer Lie-Algebra \mathcal{L} heißt *invariant*, falls gilt

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (1.2)$$

Eine Lie-Algebra, auf der ein invariantes Skalarprodukt existiert, nennt man *kompakt*¹. Bei einer kompakten Lie-Algebra ist das Ideal $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ halbeinfach und es gilt

$$\mathcal{L} = Z(\mathcal{L}) \oplus_{\text{AI}} [\mathcal{L}, \mathcal{L}] \quad (1.3)$$

[HN, S. 241]. An dieser Zerlegung, die ein Spezialfall der sogenannten *Levi-Mal'cev-Zerlegung* ist, sieht man, daß es für die Kenntnis der kompakten Lie-Algebren ausreicht, die halbeinfachen kompakten zu kennen. Die in der Teilchenphysik auftretenden inneren Symmetriegruppen sind allesamt (topologisch) kompakt und haben deshalb kompakte Lie-Algebra (mit Hilfe des Haar-Maßes auf der Gruppe mittelt man ein beliebiges Skalarprodukt auf der Lie-Algebra zu einem invarianten Skalarprodukt). Es bedeutet also keine wesentliche Einschränkung der Anwendungsmöglichkeiten, wenn wir uns bei den Strukturuntersuchungen auf halbeinfache Lie-Algebren beschränken.

Normalisator Sei \mathcal{B} eine Teilmenge von \mathcal{L} . Der Normalisator von \mathcal{B} ist die Menge

$$N_{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{L} : [x, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{B}\}.$$

$N_{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ ist aufgrund der Jacobi-Identität eine Unteralgebra von \mathcal{L} . Ist \mathcal{B} selbst eine Unteralgebra, dann ist $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ die größte Unteralgebra von \mathcal{L} , die \mathcal{B} als Ideal enthält.

Darstellungen Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$. Sei \mathcal{L} eine Lie-Algebra über \mathbb{K}' . Eine \mathbb{K} -Darstellung von \mathcal{L} ist ein Paar (V, f) , bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum V und einem Morphismus von \mathbb{K}' -Lie-Algebren $f : \mathcal{L} \rightarrow gl(V)$.²

Bei einer Darstellung kann man Information über die Lie-Algebra verlieren, diese "verschwindet" sozusagen im Kern des Morphismus f . Eine Darstellung nennt man *treu*, wenn sie injektiv ist, wenn also keine Information verloren geht.

Die \mathbb{K} -Darstellungen einer fixierten \mathbb{K}' -Lie-Algebra \mathcal{L} bilden selbst wieder eine algebraische Struktur: Als *Morphismen von Darstellungen* von (V, f) nach (W, g) nimmt man diejenigen \mathbb{K} -Vektorraum-Morphismen $\phi : V \rightarrow W$, die

$$g(x) \circ \phi = \phi \circ f(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$$

erfüllen. Ein solches ϕ wird *Verflechtungsoperator* (engl. *intertwiner*) genannt. Insbesondere sind zwei Darstellungen isomorph oder, wie man auch oft sagt, äquivalent (diese Terminologie werden wir hier bevorzugen), wenn es einen bijektiven Verflechtungsoperator gibt.

Die Verflechtungsoperatoren von (V, f) nach (W, g) bilden einen Vektorraum. Die *reelle* Dimension dieses Vektorraumes nennt man *Verflechtungszahl* der beiden Darstellungen.

Wir weisen darauf hin, daß in der mathematischen Literatur im allgemeinen nicht von Darstellungen einer Lie-Algebra \mathcal{L} , sondern von \mathcal{L} -*Moduln* gesprochen wird. Dies erscheint vom algebraischen Standpunkt aus natürlicher, ist aber völlig äquivalent.

¹Dieser Begriff ist natürlich nicht topologisch zu verstehen.

²Die Körper \mathbb{K} und \mathbb{K}' können wirklich verschieden sein, siehe dazu die im Abschnitt 1.4 besprochenen Algebren $u(n)$ und $su(n)$.

Operationen mit Darstellungen

Seien (V, f) , (W, g) Darstellungen von \mathcal{L} über demselben Körper. Wir definieren

(a) die *duale* oder *kontragrediente* Darstellung $f^* : \mathcal{L} \rightarrow gl(V^*)$ durch

$$(f^*(x)\eta)(v) := -\eta(f(x)v) \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in V, \eta \in V^*$$

(b) die *direkte Summe* $f \oplus g : \mathcal{L} \rightarrow gl(V \oplus W)$ durch

$$(f \oplus g)(x)(v, w) := (f(x)v, g(x)w) \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in V, w \in W$$

(c) das *Tensorprodukt* $f \otimes g : \mathcal{L} \rightarrow gl(V \otimes W)$ durch

$$(f \otimes g)(x)(v \otimes w) := (f(x)v) \otimes w + v \otimes (g(x)w) \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in V, w \in W$$

(d) das *r-fache äußere Produkt* $\wedge^r f : \mathcal{L} \rightarrow gl(\wedge^r V)$ durch

$$(\wedge^r f)(x)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) := (f(x)v_1) \wedge \cdots \wedge v_r + \cdots + v_1 \wedge \cdots \wedge (f(x)v_r) \quad \forall x \in \mathcal{L}, v_i \in V.$$

Irreduzible Darstellungen Um etwas Ordnung in die große Anzahl möglicher Darstellungen einer Lie-Algebra \mathcal{L} zu bringen, führt man ein Kriterium ein, welches in einem gewissen Sinne elementare Darstellungen auszeichnet: man nennt eine Darstellung (V, f) *irreduzibel*, falls V keinen echten Unterraum enthält, der unter der Wirkung von $f(\mathcal{L})$ invariant ist. Eine Darstellung heißt *vollständig reduzibel*, falls sie einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen isomorph ist.

Wir werden lernen, daß bei einer halbeinfachen Lie-Algebra alle Darstellungen vollständig reduzibel sind. Für eine solche Lie-Algebra sind die irreduziblen Darstellungen Grundbausteine, aus denen alle anderen Darstellungen aufgebaut werden können.

Im folgenden Satz geben wir zwei notwendige Kriterien für die Irreduzibilität einer Darstellung an:

Satz 1.1 (Lemma von Schur)

(a) Ein Morphismus zwischen zwei irreduziblen Darstellungen einer Lie-Algebra ist entweder 0 oder ein Isomorphismus.

(b) Jeder Endomorphismus einer irreduziblen Darstellung (V, f) einer Lie-Algebra ist proportional zur Identität $\mathbb{1}_V$.

Die Aussage (b) kann man auch so formulieren: Vertauscht ein linearer Operator auf V mit allen Operatoren $f(x)$, $x \in \mathcal{L}$, dann ist er proportional der Identität.

BEWEIS:

zu (a): Bild und Kern eines Morphismus von Darstellungen sind invariante Unterräume, wegen der Irreduzibilität also $\{0\}$ oder der ganze Raum. Ist das Bild $\{0\}$, dann ist der Morphismus selbst 0; ist das Bild der ganze Raum, dann ist der Kern $\{0\}$ und der Morphismus ein Isomorphismus.

zu (b): Sei ϕ ein Endomorphismus von (V, f) . Setzen wir in (a) $(V_2, f_2) = (V_1, f_1)$, so erhalten wir nur " $\phi = 0$ oder Automorphismus ". Die zu beweisende Aussage ist aber genauer.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir bilden $W_\lambda := (\phi - \lambda \mathbb{1}_V)V$. W_λ ist invariant:

$$f(\mathcal{L})W_\lambda = f(\mathcal{L})(\phi - \lambda \mathbb{1}_V)V = (\phi - \lambda \mathbb{1}_V)f(\mathcal{L})V \subseteq W_\lambda.$$

Da ϕ einen Eigenvektor besitzt (möglicherweise zum Eigenwert 0), finden wir ein $\lambda \in \mathbb{K}$ (den zugehörigen Eigenwert), so daß $W_\lambda \neq V$. Es folgt $W_\lambda = \{0\}$, also $\phi = \lambda \mathbb{1}$. ■

Die adjungierte Darstellung Man kann natürlich Darstellungen $f : \mathcal{L} \rightarrow gl(\mathcal{L})$ einer Lie-Algebra \mathcal{L} in die linearen Operatoren auf dem unterliegenden Vektorraum betrachten. Eine dieser Darstellungen, die sogenannte *adjungierte Darstellung* $ad_{\mathcal{L}}$, ist in kanonischer Weise durch das Produkt der Algebra gegeben:

$$ad_{\mathcal{L}}(x) y := [x, y], \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Beim Umgang mit Unteralgebren $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ beachte man eine Feinheit: für $x \in \mathcal{L}'$ gilt dann $ad_{\mathcal{L}'}(x) = ad_{\mathcal{L}}(x)|_{\mathcal{L}'}$. Man muß also genau im Auge behalten, auf welche Lie-Algebra sich ad bezieht, deshalb der Index. Besteht allerdings keine Verwechslungsgefahr, so lassen wir ihn weg.

Man kann sich vorstellen, daß die adjungierte Darstellung viel über \mathcal{L} weiß. Wir werden sie im folgenden immer wieder benutzen, um Einblick in die Struktur von Lie-Algebren zu gewinnen. Folgende drei Aussagen zum Beispiel erhält man unmittelbar aus den Definitionen der entsprechenden Begriffe und den Rechenregeln für die Lie-Klammer:

Satz 1.2 Sei \mathcal{L} eine Lie-Algebra.

- (a) Es gilt $\ker ad_{\mathcal{L}} = Z(\mathcal{L})$. Insbesondere ist die adjungierte Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra treu.
- (b) Die unter der adjungierten Darstellung invarianten Unterräume von \mathcal{L} sind genau die Ideale von \mathcal{L} . Insbesondere ist eine Lie-Algebra einfach genau dann, wenn ihre adjungierte Darstellung irreduzibel ist.
- (c) Das Bild der adjungierten Darstellung, $ad_{\mathcal{L}}(\mathcal{L})$, ist ein Ideal in $Der(\mathcal{L})$.

Derivationen der Form $ad(x)$, $x \in \mathcal{L}$, heißen *innere Derivationen*.

Rang Für $x \in \mathcal{L}$ sind die Eigenwerte λ_i des linearen Operators $ad(x)$ auf \mathcal{L} durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(ad(x) - \lambda \mathbb{1})$ gegeben. Wir schreiben

$$\det(ad(x) - \lambda \mathbb{1}) = \sum_k p_k(x) \lambda^k \tag{1.4}$$

mit Koeffizientenfunktionen $p_k : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$. Für beliebige $x \in \mathcal{L}$ gilt $ad(x)x = 0$. Deshalb ist $p_0 \equiv 0$. Die kleinste natürliche Zahl n , für die ein $x \in \mathcal{L}$ mit $p_n(x) \neq 0$ existiert, heißt *Rang* von \mathcal{L} , symbolisch: $rg(\mathcal{L})$. Elemente $x \in \mathcal{L}$ mit $p_{rg(\mathcal{L})}(x) \neq 0$ nennt man *regulär*.

Der Rang von \mathcal{L} ist offenbar die minimale Vielfachheit des Eigenwertes 0, die bei einem Operator der Form $ad(x)$, $x \in \mathcal{L}$, auftreten kann.

Innere Automorphismen Für jeden linearen Operator A auf \mathcal{L} konvergiert die Exponential-Reihe³

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Wegen $\exp(A) \circ \exp(-A) = id_{\mathcal{L}}$ ist $\exp(A)$ ein Vektorraum-Automorphismus auf \mathcal{L} ; im allgemeinen wird es aber die Lie-Klammer nicht respektieren. Ist allerdings $A \in Der(\mathcal{L})$, so findet man unter Benutzung der iterierten Produktregel

$$\frac{A^n}{n!} [x, y] = \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{A^k}{k!} x \right), \left(\frac{A^{n-k}}{(n-k)!} y \right) \right]$$

³alle Normen auf der Algebra der linearen Operatoren auf \mathcal{L} sind äquivalent; für jede gibt es eine Konstante C , so daß $\|AB\| \leq C\|A\|\|B\| \forall A, B$

und der üblichen Grenzwertsätze die Beziehung

$$\begin{aligned} \exp(A) [x, y] &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) [x, y] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{n!} [x, y] \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{A^k}{k!} x \right), \left(\frac{A^{n-k}}{(n-k)!} y \right) \right] \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{A^k}{k!} x \right), \left(\frac{A^m}{m!} y \right) \right] = [\exp(A) x, \exp(A) y]. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist $\exp(A)$ also ein Automorphismus von Lie-Algebren. Im besonderen trifft das auf die Operatoren $\text{ad}_{\mathcal{L}}(x)$, $x \in \mathcal{L}$, zu. Automorphismen von dieser Gestalt nennt man *innere Automorphismen*. Die Menge der inneren Automorphismen bezeichnen wir mit $\text{Int}(\mathcal{L})$. Man kann zeigen, daß $\text{Int}(\mathcal{L})$ eine Gruppe ist (Stichwort: Campbell-Hausdorff-Formel). Wegen

$$A \circ \exp(\text{ad}(x)) \circ A^{-1} = \exp(A \circ \text{ad}(x) \circ A^{-1}) = \exp(\text{ad}(Ax)) \quad \forall A \in \text{Aut}_{\text{Al}}(\mathcal{L})$$

ist $\text{Int}(\mathcal{L})$ sogar eine normale Untergruppe von $\text{Aut}_{\text{Al}}(\mathcal{L})$.

Invariante symmetrische Bilinearformen (ISBLF) Die Eigenschaft der Invarianz hatten wir schon in Gleichung (1.2) definiert. Eine Bilinearform B auf \mathcal{L} heißt *symmetrisch*, falls $B(x, y) = B(y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$ gilt. Für eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ setzen wir

$$\mathcal{M}^{\perp B} := \left\{ x \in \mathcal{L} : B(x, \mathcal{M}) = \{0\} \right\}.$$

Man nennt B *nicht ausgeartet*, falls $\mathcal{L}^{\perp B} = \{0\}$.

Im folgenden nehmen wir eine ISBLF B als fixiert an und lassen alle entsprechenden Indizes weg. Wir sehen, daß \mathcal{M}^{\perp} für beliebige Teilmengen \mathcal{M} ein Unterraum von \mathcal{L} ist, aber nicht notwendig eine Unteralgebra. Desweiteren ist zu beachten, daß \mathcal{M}^{\perp} im allgemeinen kein Vektorraum-Komplement zu $\text{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{M}$ in \mathcal{L} ist, d. h. es muß weder $(\text{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{M}) \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$ noch $\mathcal{L} = (\text{span}_{\mathbb{K}} \mathcal{M}) \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ gelten. Für Ideale allerdings hat man

Satz 1.3 Sei \mathcal{L} eine Lie-Algebra, B eine ISBLF auf \mathcal{L} und \mathcal{I} ein Ideal in \mathcal{L} . Dann ist auch \mathcal{I}^{\perp} ein Ideal und es gilt $[\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\perp}] \subseteq \mathcal{L}^{\perp}$.

BEWEIS: Aus der Invarianz folgt:

- $B(\mathcal{I}, [\mathcal{L}, \mathcal{I}^{\perp}]) = B([\mathcal{I}, \mathcal{L}], \mathcal{I}^{\perp}) = B(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\perp}) = \{0\}$, also $[\mathcal{L}, \mathcal{I}^{\perp}] \subseteq \mathcal{I}^{\perp}$ und \mathcal{I}^{\perp} ist Ideal
- $B(\mathcal{L}, [\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\perp}]) = B([\mathcal{L}, \mathcal{I}], \mathcal{I}^{\perp}) = B(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\perp}) = 0$, also $[\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\perp}] \subseteq \mathcal{L}^{\perp}$. ■

Spurform Sei (V, f) eine Darstellung der Lie-Algebra \mathcal{L} . Die Bilinearform

$$B_f(x, y) := \text{tr}_V(f(x)f(y)) \tag{1.5}$$

ist eine ISBLF auf \mathcal{L} . Sie heißt *Spurform* der Darstellung (V, f) . Sind die Darstellungen (V, f) und (W, g) von \mathcal{L} äquivalent, dann gilt

$$B_f(x, y) = B_g(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \tag{1.6}$$

BEWEIS: Sei $\phi : V \rightarrow W$ ein Verflechtungsoperator. Wir wählen ein Paar dualer Basen⁴ $\{v_i\}$, $\{\eta^i\}$ in V bzw. V^* . Dann ist $\{\phi v_i\}$, $\{\phi^{-1*} \eta^i\}$ ein Paar dualer Basen in W bzw. W^* . Wir schreiben

$B_f(x, y) = \text{tr}_V(f(x)f(y)) = \sum_i \eta^i(f(x)f(y)v_i) = \sum_i \eta^i((f(x)\phi^{-1})\phi(f(y)\phi^{-1})\phi v_i)$,
ersetzen $f(x)\phi^{-1} = \phi^{-1}g(x)$ und erhalten

$$B_f(x, y) = \sum_i (\phi^{-1*} \eta^i) (g(x)g(y)\phi v_i) = \text{tr}_W(g(x)g(y)). \quad \blacksquare$$

Killing-Form Die Killing-Form ist die Spurform der adjungierten Darstellung:

$$(x, y)_{\mathcal{L}} := \text{tr}_{\mathcal{L}}(\text{ad}(x) \text{ad}(y)) \quad (1.7)$$

(wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, lassen wir den Index weg). Im weiteren beziehen sich geometrische Begriffe wie "orthogonal" oder "isometrisch" immer auf die Killing-Form.

Jeder Isomorphismus $\phi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ zwischen Lie-Algebren \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 ist isometrisch, d. h. es gilt

$$(\phi x, \phi y)_{\mathcal{L}_2} = (x, y)_{\mathcal{L}_1} \quad \forall x, y \in \mathcal{L}_1. \quad (1.8)$$

BEWEIS: $(x, y)_{\mathcal{L}_1}$ ist die Spurform der Darstellung $(\mathcal{L}_1, \text{ad}_{\mathcal{L}_1})$, $(\phi x, \phi y)_{\mathcal{L}_2}$ die Spurform der Darstellung $(\mathcal{L}_2, \text{ad}_{\mathcal{L}_2} \circ \phi)$ von \mathcal{L}_1 . Beide Darstellungen sind über ϕ isomorph zueinander:

$$\phi \circ \text{ad}_{\mathcal{L}_1}(x)y = \phi[x, y] = [\phi x, \phi y] = \text{ad}_{\mathcal{L}_2}(\phi x) \circ \phi y \quad \forall x, y \in \mathcal{L}_1.$$

Die Behauptung folgt dann aus Gleichung (1.6). \blacksquare

Sei $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ eine Unteralgebra. Die Einschränkung der Killing-Form von \mathcal{L} auf \mathcal{L}' wird im allgemeinen nicht mit der Killing-Form von \mathcal{L}' übereinstimmen: bei letzterer wird die Spur ja nur über den Unterraum $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ genommen; wie die Operatoren $\text{ad}_{\mathcal{L}}(x')$, $x' \in \mathcal{L}'$ auf dem Rest wirken, geht gar nicht ein. Man hat allerdings

Satz 1.4 Sei \mathcal{L} eine Lie-Algebra und \mathcal{I} ein Ideal. Es gilt $(x, y)_{\mathcal{I}} = (x, y)_{\mathcal{L}} \quad \forall x, y \in \mathcal{I}$.

BEWEIS: Wir wählen ein Vektorraum-Komplement \mathcal{J} , so daß $\mathcal{L} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Ein linearer Operator A auf \mathcal{L} läßt sich bezüglich dieser Zerlegung als Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{I}\mathcal{I}} & A_{\mathcal{J}\mathcal{I}} \\ A_{\mathcal{I}\mathcal{J}} & A_{\mathcal{J}\mathcal{J}} \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $A_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ von \mathcal{J} nach \mathcal{I} abbildet usw. Seien nun $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$. Da \mathcal{I} Ideal ist, hat $\text{ad}_{\mathcal{L}}(x_i)$ die Form

$$\begin{pmatrix} \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_i)|_{\mathcal{I}} & \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_i)|_{\mathcal{J}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (x_1, x_2)_{\mathcal{L}} &= \text{tr}_{\mathcal{L}}(\text{ad}_{\mathcal{L}}(x_1)\text{ad}_{\mathcal{L}}(x_2)) = \text{tr} \begin{pmatrix} \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_1)|_{\mathcal{I}} \circ \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_2)|_{\mathcal{I}} & \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_1)|_{\mathcal{I}} \circ \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_2)|_{\mathcal{J}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{tr}_{\mathcal{I}}(\text{ad}_{\mathcal{L}}(x_1)|_{\mathcal{I}} \circ \text{ad}_{\mathcal{L}}(x_2)|_{\mathcal{I}}) = \text{tr}(\text{ad}_{\mathcal{I}}(x_1)\text{ad}_{\mathcal{I}}(x_2)) \\ &= (x_1, x_2)_{\mathcal{I}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

⁴d. h. $\eta^i(v_j) = \delta_j^i$

1.3 Besonderheiten halbeinfacher Lie-Algebren

Wir beginnen mit zwei äquivalenten Kriterien für Halbeinfachheit.

Satz 1.5 Sei \mathcal{L} eine Lie-Algebra. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) \mathcal{L} ist halbeinfach.
- (b) Die Killing-Form von \mathcal{L} ist nicht ausgeartet.
- (c) \mathcal{L} enthält keine kommutativen Ideale außer $\{0\}$.

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b): Wir zeigen, daß \mathcal{L}^\perp (\mathcal{L} eine beliebige Lie-Algebra) ein auflösbares Ideal ist: Ideal ist es nach Satz 1.3. Satz 1.4 besagt, daß seine Killing-Form gleich 0 ist. Die Behauptung folgt dann aus dem *Cartan-Kriterium*

Eine Lie-Algebra $\tilde{\mathcal{L}}$ mit der Eigenschaft $(x, y)_{\tilde{\mathcal{L}}} = 0 \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{L}}, y \in [\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}]$ ist auflösbar. [Hu, §4.3.]

(b) \Rightarrow (c): Jedes kommutative Ideal \mathcal{I} einer Lie-Algebra \mathcal{L} ist in \mathcal{L}^\perp enthalten: Für $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathcal{L}$ gilt nämlich $\left((\text{ad}(x)\text{ad}(y)) \right)^2 = \left(\text{ad}(x)|_{\mathcal{I}} \right) \circ \text{ad}(y)\text{ad}(x)\text{ad}(y) = 0$, d. h. der Operator $\text{ad}(x)\text{ad}(y)$ ist nilpotent. Es folgt $(x, y)_{\mathcal{L}} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{L}$.

(c) \Rightarrow (a): (indirekt) Sei \mathcal{I} ein Ideal in \mathcal{L} . Mit Hilfe der Jacobi-Identität prüft man induktiv, daß die Glieder $\mathcal{I}^{(n)}$ der oberen Zentralreihe ebenfalls Ideale in \mathcal{L} sind.

Gäbe es ein auflösbares Ideal $\mathcal{I} \neq \{0\}$ in \mathcal{L} , dann fänden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{I}^{(n)} \neq \{0\}$ und $\mathcal{I}^{(n+1)} = [\mathcal{I}^{(n)}, \mathcal{I}^{(n)}] = \{0\}$. $\mathcal{I}^{(n)}$ wäre damit ein von $\{0\}$ verschiedenes kommutatives Ideal in \mathcal{L} (Widerspruch). ■

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Kriterium (b) ist

Satz 1.6 Direkte Summen halbeinfacher Lie-Algebren sind halbeinfach.

BEWEIS: Für die Killing-Form der direkten Summe zweier Lie-Algebren $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ gilt

$$\left((x_1, x_2), (y_1, y_2) \right)_{\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2} = (x_1, y_1)_{\mathcal{L}_1} + (x_2, y_2)_{\mathcal{L}_2} \quad \forall x_i, y_i \in \mathcal{L}_i. \quad \blacksquare$$

Satz 1.7 Sei \mathcal{L} eine (beliebige) Lie-Algebra und \mathcal{I} ein halbeinfaches Ideal in \mathcal{L} . Dann gilt $\mathcal{L} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp$ (direkte Summe von Algebren). Insbesondere ist $[\mathcal{I}, \mathcal{I}^\perp] = \{0\}$.

BEWEIS: Aus Satz 1.4 und Kriterium 1.5 (b) folgt

(*) Die Einschränkung der Killing-Form von \mathcal{L} auf das Ideal \mathcal{I} ist nicht ausgeartet.

Damit ist $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp = \{0\}$. Da \mathcal{I}^\perp nach Satz 1.3 ebenfalls Ideal in \mathcal{L} ist, gilt desweiteren $[\mathcal{I}, \mathcal{I}^\perp] \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp = \{0\}$. Dies beides zeigt, daß die Lie-Algebra $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp$ eine Unter algebra von \mathcal{L} ist.

Andererseits können wir ein beliebiges $x \in \mathcal{L}$ nach \mathcal{I} und \mathcal{I}^\perp zerlegen: Wegen (*) finden wir ein Paar von Basen $\{a_i\}, \{b_i\}$ in \mathcal{I} , die bezüglich der Killing-Form dual sind⁵. Wir setzen $x_{\mathcal{I}} := \sum_i (x, a_i)_{\mathcal{L}} b_i$. Dann ist $x_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}$ und $x - x_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}^\perp$. ■

Betrachten wir die Gesamtheit der einfachen Ideale $\{\mathcal{I}_\alpha : \alpha \in A\}$ einer Lie-Algebra \mathcal{L} . Für $\alpha \neq \beta$ gilt

⁵d. h. $(a_i, b_j)_{\mathcal{L}} = \delta_{ij}$

- $\mathcal{I}_\alpha \cap \mathcal{I}_\beta = \{0\}$ (denn dies ist ein Ideal in \mathcal{I}_α und in \mathcal{I}_β)
- $[\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{I}_\beta] \subseteq \mathcal{I}_\alpha \cap \mathcal{I}_\beta = \{0\}$.

Damit ist $\bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha$ ein halbeinfaches Ideal in \mathcal{L} . Wir schließen

- Die Menge der einfachen Ideale ist endlich.
- \mathcal{L} besitzt die Zerlegung

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha \tag{1.9}$$

in eine direkte Summe von Idealen, wobei $\mathcal{R} := \left(\bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha\right)^\perp$.

Wir geben nun ein weiteres Kriterium für Halbeinfachheit an.

Satz 1.8 (Struktursatz) *Eine Lie-Algebra \mathcal{L} ist genau dann halbeinfach, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Lie-Algebren ist. In diesem Fall sind die Summanden eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: Die eine Richtung liefert Satz 1.6. Sei deshalb \mathcal{L} halbeinfach. Wir zeigen, daß sich dann das Ideal \mathcal{R} in der Zerlegung (1.9) von \mathcal{L} zu $\{0\}$ reduziert (aus dieser Zerlegung folgt auch unmittelbar die Eindeutigkeit). Dazu benötigen wir

Lemma 1.9 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra und \mathcal{I} ein Ideal. Es gilt*

- (a) \mathcal{I} ist halbeinfach.
- (b) Ideale in \mathcal{I} sind auch Ideale in \mathcal{L} .
- (c) Ist $\mathcal{L} \neq \{0\}$, dann enthält \mathcal{L} ein einfaches Ideal.

BEWEIS:

zu (a): Wir betrachten $\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp$. \mathcal{I}' ist ein Ideal in \mathcal{L} . Nach Satz 1.3 ist \mathcal{I}' kommutativ: $[\mathcal{I}', \mathcal{I}'] \subseteq [\mathcal{I}, \mathcal{I}^\perp] \subseteq \mathcal{L}^\perp = \{0\}$. Damit gilt $\mathcal{I}' = \{0\}$ und die Behauptung folgt aus Satz 1.4 und Kriterium 1.5 (b).

zu (b): Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.7.

zu (c): \mathcal{L} enthält ein minimales, von $\{0\}$ verschiedenes Ideal. Dieses muß nach Punkt (b) einfach sein.

Wir fahren fort mit dem Beweis des Satzes: Sei $\mathcal{R} \neq \{0\}$. Nach Punkt (a) des Lemmas ist \mathcal{R} halbeinfach. Nach Punkt (c) enthält es damit ein einfaches Ideal. Dieses ist aber nach Punkt (b) auch ein einfaches Ideal in \mathcal{L} (Widerspruch). ■

Der Struktursatz gestattet es bei vielen Fragestellungen, die Untersuchung der halbeinfachen Lie-Algebren auf die Untersuchung der einfachen Lie-Algebren zurückzuführen.

Eine direkte Folgerung aus dem Struktursatz ist

Satz 1.10 *Die Ideale einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} sind gegeben durch beliebige Teilmengen der Zerlegung von \mathcal{L} in einfache Ideale.* ■

Eine weitere spezielle Eigenschaft von halbeinfachen Lie-Algebren formulieren wir im

Satz 1.11 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra. Dann gilt $\text{ad}(\mathcal{L}) = \text{Der}(\mathcal{L})$, d. h. alle Derivationen sind innere Derivationen.*

BEWEIS: Wir bezeichnen $\mathcal{D} := \text{Der}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{A} := \text{ad}(\mathcal{L})$. Wegen

$$[d, \text{ad}(x)]y = \text{ad}(dx)y \quad \forall d \in \mathcal{D}, x, y \in \mathcal{L} \quad (*)$$

ist \mathcal{A} ein halbeinfaches Ideal in \mathcal{D} . Nach Satz 1.7 genügt es also, $\mathcal{A}^\perp = \{0\}$ zu zeigen. Sei dazu $d \in \mathcal{A}^\perp$. Mit $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^\perp] = \{0\}$ und (*) ergibt sich $\text{ad}(dx) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}$. Aus der Injektivität der adjungierten Darstellung folgt $d = 0$. ■

1.4 Beispiele

Einige klassische Lie-Algebren

Entsprechend der Bemerkung zur Lie-Algebra $gl(V)$ im Beispiel 1 auf Seite 8 kann man alle im folgenden besprochenen Lie-Algebren als Linearisierungen gewisser Lie-Gruppen auffassen. Auf diese Weise würden sich auch ihre Namen erklären. Wir definieren sie jedoch zweckmäßigerweise rein algebraisch, und zwar als Unteralgebren von $gl(n, \mathbb{K})$.

In diesem Abschnitt sei ausnahmsweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ |⁶.

Satz 1.12 Sei $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ eine bi- bzw. sesquilineare⁷ Form auf \mathbb{K}^n . Wir betrachten die Menge der bezüglich L schiefadjungierten linearen Operatoren auf \mathbb{K}^n :

$$\mathcal{S}_L := \{A \in gl(\mathbb{K}, n) : L(A\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -L(\mathbf{a}, A\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}\} . \quad (1.10)$$

\mathcal{S}_L ist eine

- \mathbb{K} -Lie-Algebra, falls L bilinear ist,
- reelle Lie-Algebra, falls L sesquilinear ist.

BEWEIS: Für $A, B \in \mathcal{S}_L$ gilt

$L([A, B]\mathbf{a}, \mathbf{b}) = L(AB\mathbf{a}, \mathbf{b}) - L(BA\mathbf{a}, \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}, BAB) - L(\mathbf{a}, AB\mathbf{b}) = -L(\mathbf{a}, [A, B]\mathbf{b})$,
d. h. \mathcal{S}_L ist unter Kommutatorbildung abgeschlossen. Ist L bilinear, dann ist \mathcal{S}_L offensichtlich ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ist dagegen L sesquilinear, dann ist \mathcal{S}_L zwar noch abgeschlossen unter Summenbildung, für die Multiplikation von Elementen $A \in \mathcal{S}_L$ mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt jedoch $L((\lambda A)\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -L(\mathbf{a}, (\bar{\lambda}A)\mathbf{b})$ |⁸, d. h. λA gehört nur dann wieder zu \mathcal{S}_L , wenn λ reell ist. Damit ist \mathcal{S}_L , unabhängig von \mathbb{K} , eine reelle Lie-Algebra. ■

Für $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ wählen wir nun konkret:

1. die kanonische symmetrische Bilinearform $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$:

Diese definiert die orthogonale Algebra $so(n, \mathbb{K})$. Man findet

$$so(n, \mathbb{K}) = \{A \in gl(n, \mathbb{K}) : A^t = -A\} .$$

Die Operatoren aus $so(n, \mathbb{K})$ haben auf der Hauptdiagonale ausschließlich Nullen und sind daher automatisch spurfrei. Durch Abzählen der frei wählbaren Matrixelemente ergibt sich für die Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

⁶Die Definition von gl und sl im quaternionischen Fall ist völlig analog zu der im komplexen und reellen Fall. Man muß nur festlegen, ob man \mathbb{H}^n als Links- oder Rechts- \mathbb{H} -Modul betrachten will; die Endomorphismen wirken dann von der jeweils anderen Seite.

⁷im ersten Argument antilinear, im zweiten linear

⁸ $\bar{\lambda}$ bezeichnet die natürliche Konjugation sowohl auf \mathbb{C} , als auch auf \mathbb{H}

2. die kanonische antisymmetrische Bilinearform $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

Diese existiert nur dann, wenn n gerade, d. h. $n = 2m$ ist. In diesem Fall hat sie die Gestalt

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot J \mathbf{b}$$

mit der $(2m \times 2m)$ -Matrix

$$J := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Die Form ω definiert die *symplektische* Algebra⁹ $sp(m, \mathbb{K})$. Wir erhalten

$$sp(m, \mathbb{K}) = \{A \in gl(2m, \mathbb{K}) : JA^t J = -A\}.$$

Schreiben wir Operatoren A auf \mathbb{K}^{2m} in der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

mit $(m \times m)$ -Matrizen A_{ij} , dann ist $A \in sp(m, \mathbb{K})$ genau dann, wenn

$$A_{11} = -A_{22}^t, \quad A_{12} = A_{12}^t, \quad A_{21} = A_{21}^t. \quad (1.13)$$

Wir sehen daran, daß auch die Elemente von $sp(m, \mathbb{K})$ automatisch spurfrei sind. Für die Dimension ergibt sich $m(2m + 1)$.

3. das kanonische Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{K}} = \sum_i \bar{a}_i b_i$ auf \mathbb{K}^n :

Setzen wir $A^\dagger = \bar{A}^t$, dann gilt

$$\mathcal{S}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}}} = \{A \in gl(n, \mathbb{K}) : A^\dagger = -A\}.$$

Mit der Bezeichnung $k := \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ folgt für die Dimension

$$\dim(\mathcal{S}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}}}) = \frac{k}{2}n(n-1) + (k-1),$$

Wir erhalten:

– Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: die reelle orthogonale Algebra $so(n)$. Diese ist natürlich identisch mit der Lie-Algebra $so(n, \mathbb{R})$ aus Punkt 1. Wir verwenden beide Bezeichnungen gleichwertig.

– Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: die *unitäre* Algebra $u(n)$. Die Unteralgebra $su(n)$ ("spezielle unitäre Algebra") der spurfreien Operatoren aus $u(n)$ spielt eine bedeutende Rolle in der Physik; hervorzuheben sind vor allem die Fälle $n = 2$ (Spin und Isospin) und $n = 3$ (Quarks). Die Dimensionen sind $\dim(u(n)) = n^2$ und $\dim(su(n)) = n^2 - 1$.

– Für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$: die symplektische Algebra $sp(n)$ mit der Dimension $n(2n + 1)$. Konsequenterweise müßte diese "quaternionische unitäre Algebra" genannt und mit $u(n, \mathbb{H})$ bezeichnet werden. Üblich ist aber die Bezeichnung $sp(n)$. Eine gewisse Berechtigung erhält diese Sprechweise durch die folgende Isomorphie:

$$sp(n) \cong sp(n, \mathbb{C}) \cap su(2n) \quad |^{10}. \quad (1.14)$$

⁹eine nicht ausgeartete antisymmetrische Bilinearform wird allgemein als *symplektische* Form bezeichnet

¹⁰ $sp(n, \mathbb{C}) \cap su(2n)$ ist offenbar eine reelle Lie-Algebra

BEWEIS: Wir zerlegen eine quaternionische $(n \times n)$ -Matrix B in

$$B = B_1 + iB_2 + jB_3 + kB_4$$

mit reellen $(n \times n)$ -Matrizen B_i , $i = 1, \dots, 4$, und definieren eine Abbildung

$$\phi : gl(n, \mathbb{H}) \rightarrow gl(2n, \mathbb{C}), \quad B \mapsto \begin{pmatrix} B_1 - iB_4 & -iB_2 - B_3 \\ -iB_2 + B_3 & B_1 + iB_4 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nach:

- ϕ ist reell linear und injektiv
- ϕ respektiert das Matrix-Produkt und damit auch den Kommutator
- $\phi(B^\dagger) = (\phi(B))^\dagger \quad \forall B \in gl(n, \mathbb{H})$.

Damit ist ϕ ein Isomorphismus von $sp(n)$ auf sein Bild und dieses Bild gegeben durch

$$\phi(sp(n)) = \phi(gl(n, \mathbb{H})) \cap su(2n).$$

In dieser Gleichung wollen wir nun $\phi(gl(n, \mathbb{H}))$ durch $sp(n, \mathbb{C})$ ersetzen:

Ein Matrix $A \in gl(2n, \mathbb{C})$ gehört zu $\phi(gl(n, \mathbb{H}))$ gdw.

$$A_{11} = \overline{A_{22}} \quad \text{und} \quad A_{12} = -\overline{A_{21}}.$$

Unter der Nebenbedingung $A \in su(2n)$ sind diese Gleichungen wegen

$$\overline{A_{22}} = (A_{22}^\dagger)^t = -A_{22}^t, \quad -\overline{A_{21}} = -(A_{21}^\dagger)^t = A_{12}^t, \quad A_{12} = -A_{21}^\dagger = -\overline{A_{21}^t}$$

äquivalent zu (1.13), d. h. es gilt $A \in \phi(gl(n, \mathbb{H}))$ gdw. $A \in sp(n, \mathbb{C})$. ■

Abschließend wollen wir darauf hinweisen, daß die gemäß (1.10) durch eine Bi- bzw. Sesquilinearform L definierte Lie-Algebra gerade die Linearisierung derjenigen Untergruppe von $GL(\mathbb{K}^n)$ ist, die die Form L invariant läßt.

Ausgewählte Eigenschaften

Wir wollen jetzt herausfinden, welche von den oben definierten Lie-Algebren halbeinfach und welche kompakt sind. Desweiteren wollen wir von den reellen Lie-Algebren die Komplexifizierung bestimmen.

Für $i, j = 1, \dots, n$ definieren wir

- Operatoren $E_{(ij)} \in gl(n, \mathbb{K})$: bei diesen steht an der Stelle (i, j) eine 1 und sonst 0
- Funktionale $E^{(ij)} \in gl(n, \mathbb{K})^*$ durch $E^{(ij)}(A) = A_{ij} \quad \forall A \in gl(n, \mathbb{K})$.

Die Operatoren $\{E_{(ij)}\}$ bilden eine Basis in $gl(n, \mathbb{K})$, die Funktionale $\{E^{(ij)}\}$ die dazu duale Basis in $gl(n, \mathbb{K})^*$. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} E^{(ij)}(E_{(kl)}) &= \delta_{ik}\delta_{jl}, & E_{(ij)}E_{(kl)} &= \delta_{jk}E_{(il)}, \\ [E_{(ij)}, E_{(kl)}] &= \delta_{(jk)}E_{(il)} - \delta_{(il)}E_{(kj)}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Zuerst wollen wir eine einfache Formel für die Killing-Form herleiten.

Lemma 1.13 Sei \mathcal{L} eine der Lie-Algebren, die in der unten angegebenen Tabelle aufgeführt sind. Dann gilt für je zwei Elemente $A, B \in \mathcal{L}$

$$(A, B)_{\mathcal{L}} = \lambda \operatorname{tr}(AB),$$

wobei für λ die folgenden Werte einzusetzen sind:

\mathcal{L}	$sl(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 2$)	$su(n)$ ($n \geq 2$)	$so(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 3$)	$sp(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 1$)	$sp(n)$ ($n \geq 1$)
λ	$2n$	$2n$	$n - 2$	$2(n + 1)$	$2(n + 1)$

BEMERKUNG: Den tieferen Grund dieser Proportionalität werden wir im Abschnitt 3.1 kennenlernen.

BEWEIS: Wir prüfen die Formel exemplarisch für $sl(n, \mathbb{K})$. Da $sl(n, \mathbb{K})$ ein Ideal in $gl(n, \mathbb{K})$ ist, erhalten wir die Killing-Form von $sl(n, \mathbb{K})$ durch Einschränkung der Killing-Form von $gl(n, \mathbb{K})$. Letztere berechnen wir auf den Basiselementen $E_{(ij)}$ mit Hilfe von (1.15): Für beliebige $i, j, k, l, r, s = 1, \dots, n$ gilt

$$\text{ad}(E_{(ij)}) \text{ad}(E_{(kl)}) E_{(rs)} = \delta_{lr} \delta_{jk} E_{(is)} - \delta_{lr} \delta_{is} E_{(kj)} - \delta_{ks} \delta_{jr} E_{(il)} + \delta_{ks} \delta_{il} E_{(rj)} .$$

Da $\{E_{(ij)}\}$ und $\{E^{(ij)}\}$ duale Basen sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} (E_{(ij)}, E_{(kl)})_{gl} &= \text{tr}(\text{ad}(E_{(ij)}) \text{ad}(E_{(kl)})) = \sum_{r,s=1}^n E^{(rs)} (\text{ad}(E_{(ij)}) \text{ad}(E_{(kl)}) E_{(rs)}) \\ &= \sum_{r,s=1}^n (\delta_{lr} \delta_{jk} \delta_{ir} - \delta_{lr} \delta_{is} \delta_{kr} \delta_{js} - \delta_{ks} \delta_{jr} \delta_{ir} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{il} \delta_{js}) \\ &= 2n \delta_{il} \delta_{jk} - 2 \delta_{ij} \delta_{kl} . \end{aligned} \quad (i)$$

Die Spurform andererseits ergibt

$$\text{tr}(E_{(ij)} E_{(kl)}) = \delta_{jk} \delta_{il} . \quad (ii)$$

Nun wählen wir eine Basis in $sl(n, \mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} E_{(ij)} , \quad i, j = 1, \dots, n , \quad i \neq j \\ E_{(kk)} - E_{(k+1 \ k+1)} , \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

und berechnen für deren Elemente mit Hilfe von (i) die Werte der Killing-Form:

$$\begin{aligned} (E_{(ij)}, E_{(kl)})_{gl} &= 2n \delta_{jk} \delta_{il} \\ (E_{(ij)}, E_{(kk)} - E_{(k+1 \ k+1)})_{gl} &= 2n (\delta_{ik} \delta_{jk} - \delta_{i \ k+1} \delta_{j \ k+1}) \\ (E_{(ii)} - E_{(i+1 \ i+1)}, E_{(kk)} - E_{(k+1 \ k+1)})_{gl} &= 2n (2\delta_{ik} - \delta_{i \ k+1} - \delta_{i+1 \ k}) \end{aligned}$$

und mit Hilfe von (ii) die der Spurform:

$$\begin{aligned} \text{tr}(E_{(ij)} E_{(kl)}) &= \delta_{jk} \delta_{il} \\ \text{tr}(E_{(ij)} (E_{(kk)} - E_{(k+1 \ k+1)})) &= \delta_{ik} \delta_{jk} - \delta_{i \ k+1} \delta_{j \ k+1} \\ \text{tr}((E_{(ii)} - E_{(i+1 \ i+1)}) (E_{(kk)} - E_{(k+1 \ k+1)})) &= 2 \delta_{ik} - \delta_{i \ k+1} - \delta_{i+1 \ k} . \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $sl(n, \mathbb{K})$ gezeigt. Bei den anderen Lie-Algebren verfährt man analog; es ist nur zu beachten, daß diese keine Ideale in $gl(n, \mathbb{K})$ sind. Deshalb muß man dort von Anfang an mit einer Basis der Algebra arbeiten, wodurch sich der Rechenaufwand etwas erhöht. ■

Satz 1.14

- (a) Die in der Tabelle in Lemma 1.13 aufgeführten Lie-Algebren sind halbeinfach.
 (b) Die Lie-Algebren $gl(n, \mathbb{K})$ und $u(n)$ sind nicht halbeinfach. Sie zerfallen in eine direkte Summe aus dem Zentrum und einem halbeinfachen Ideal:

$$gl(n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{1} \oplus sl(n, \mathbb{K}) \quad \text{bzw.} \quad u(n) = i\mathbb{R}\mathbb{1} \oplus su(n).$$

BEMERKUNGEN:

1. Für die im Satz nicht enthaltenen Lie-Algebren gilt: $sl(1, \mathbb{K}) = \{0\}$, $su(1) = \{0\}$, $so(1, \mathbb{K}) = \{0\}$, $so(2, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$.
2. Die unter (a) aufgeführten Lie-Algebren sind, außer $so(4, \mathbb{K})$, sogar einfach. Dies werden wir aber erst später beweisen (vgl. Satz 3.6).

3. Die Zerlegungen im Punkt (b) sind Ausdruck eines allgemeinen Sachverhalts: Jede Lie-Algebra läßt sich als halbdirekte Summe aus ihrem (eindeutig bestimmten) maximalen auflösbaren Ideal und einer maximalen halbeinfachen Untereralgebra (einem sogenannten *Levi-Faktor*) darstellen. Eine solche Zerlegung heißt *Levi-Mal'cev-Zerlegung*. Genaueres dazu findet man z. B. in [HN, §II.4, S. 142].

Die Levi-Mal'cev-Zerlegung von kompakten Lie-Algebren zum Beispiel ist durch (1.3) gegeben. Man überlegt sich leicht, daß sie für $gl(n, \mathbb{K})$ und $u(n)$ von derselben Gestalt ist. Allgemein nennt man eine Lie-Algebra \mathcal{L} , für die das Ideal $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ halbeinfach ist und die sich daher in der Form (1.3) schreiben läßt, *reduktiv*.

BEWEIS: Wir zeigen nur (a), denn (b) ist dann offensichtlich. Sei \mathcal{L} eine der Lie-Algebren aus der Tabelle in Lemma 1.13. Es gilt $\mathcal{L}^\perp = \{A \in \mathcal{L} : \text{tr}(A\mathcal{L}) = \{0\}\}$. Nehmen wir an, es gibt eine Zerlegung $gl(n, \mathbb{K}) = \mathcal{L} \oplus_{\text{VR}} \mathcal{L}_c$, so daß $\text{tr}(\mathcal{L}^\perp \mathcal{L}_c) = \{0\}$. Dann ist $\text{tr}(\mathcal{L}^\perp gl(n, \mathbb{K})) \subseteq \text{tr}(\mathcal{L}^\perp \mathcal{L}_c) = \{0\}$ und es folgt, da die Spurform auf $gl(n, \mathbb{K})$ nicht ausgeartet ist, $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$.

Im folgenden geben wir für jede der betreffenden Lie-Algebren eine solche Zerlegung an, indem wir für ein beliebiges $C \in gl(n, \mathbb{K})$ die Komponenten $C_{\mathcal{L}}$ und C_c aufschreiben.

- $\mathcal{L} = sl(n, \mathbb{K})$: $C_{\mathcal{L}} = C - (\frac{1}{n}\text{tr}C)\mathbb{1}$, $C_c = (\frac{1}{n}\text{tr}C)\mathbb{1}$

Es gilt $\mathcal{L}_c = \mathbb{K}\mathbb{1}$ und daher $\text{tr}(\mathcal{L}^\perp \mathcal{L}_c) \subseteq \text{tr}(\mathcal{L} \mathcal{L}_c) = \mathbb{K}\text{tr}(\mathcal{L}) = \{0\}$.

- $\mathcal{L} = so(n, \mathbb{K})$: $C_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(C - C^t)$, $C_c = \frac{1}{2}(C + C^t)$

Da die Elemente von \mathcal{L}_c symmetrisch, die von \mathcal{L} schiefsymmetrisch sind, ist $\text{tr}(\mathcal{L} \mathcal{L}_c) = 0$.

- $sp(n, \mathbb{K})$: Wir schreiben C in Blockgestalt (1.12) und setzen

$$C_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (C_{11} - C_{22}^t) & (C_{12} + C_{12}^t) \\ (C_{21} + C_{21}^t) & -(C_{11}^t - C_{22}) \end{pmatrix}, \quad C_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (C_{11} + C_{22}^t) & (C_{12} - C_{12}^t) \\ (C_{21} - C_{21}^t) & (C_{11}^t + C_{22}) \end{pmatrix}.$$

(Man prüfe $C_{\mathcal{L}} \in sp(n, \mathbb{K})$ anhand von (1.13).) Jedes $B \in \mathcal{L}_c$ erfüllt

$$B_{11}^t = B_{22}, \quad B_{12}^t = -B_{12}, \quad B_{21}^t = -B_{21}.$$

Mit (1.13) folgt daraus $\text{tr}(AB) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{L}_c$.

- $\mathcal{L} = su(n), sp(n)$: Bei den durch Sesquilinearformen definierten reellen Untereralgebren von $gl(n, \mathbb{K})$ müssen wir $gl(n, \mathbb{K})$ natürlich als reelle Lie-Algebra betrachten und ein reelles Komplement suchen. Zerlegen wir in schief- und selbstadjungierten Anteil

$$C_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}(C - C^\dagger), \quad C_c = \frac{1}{2}(C + C^\dagger),$$

dann ist $\mathcal{L}_c = i\mathcal{L}$ und daher $\text{tr}(\mathcal{L}^\perp \mathcal{L}_c) = i \text{tr}(\mathcal{L}^\perp \mathcal{L}) = \{0\}$. ■

Satz 1.15 Die Lie-Algebren $so(n)$, $u(n)$, $su(n)$ und $sp(n)$ sind kompakt.

BEWEIS: Die Sesquilinearform $\text{tr}(A^\dagger B)$ ist ein Skalarprodukt auf $gl(n, \mathbb{K})$. Die Invarianz auf der jeweiligen Untereralgebra folgt aus der Eigenschaft $A^\dagger = -A$:

$$\text{tr}([A, B]^\dagger C) = -\text{tr}([A, B]C) = -\text{tr}(B[A, C]) = \text{tr}(B^\dagger[A, C]). \quad \blacksquare$$

Nach Lemma 1.13 ist damit die Killing-Form von $sp(n)$, $su(n)$, $n \geq 2$ und $so(n)$, $n \geq 3$, negativ definit:

$$(A, B) = \lambda \text{tr}(AB) = -\lambda \text{tr}(A^\dagger B)$$

(der jeweilige Faktor λ steht im Lemma; er ist stets positiv). Sie definiert deshalb ebenfalls ein invariantes Skalarprodukt. Für die anderen Lie-Algebren aus dem Satz ist sie negativ semidefinit. Allgemein gilt:

– Die Killing-Form einer kompakten Lie-Algebra ist negativ semidefinit.

– Die Killing-Form einer reellen kompakten halbeinfachen Lie-Algebra ist negativ definit. Von der zweiten Aussage gilt auch die Umkehrung: Ist die Killing-Form einer reellen Lie-Algebra negativ definit, dann ist die Algebra halbeinfach und kompakt.

Satz 1.16 *Die Komplexifizierung von $gl(n, \mathbb{R})$, $sl(n, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{R})$, $sp(n, \mathbb{R})$ ist gerade die entsprechende komplexe Algebra. Darüber hinaus gilt*

$$u(n)_{\mathbb{C}} = gl(n, \mathbb{C}), \quad su(n)_{\mathbb{C}} = sl(n, \mathbb{C}), \quad sp(n)_{\mathbb{C}} = sp(n, \mathbb{C}).$$

BEWEIS: Das Argument ist in allen Fällen, daß eine (reelle) Basis in der reellen Algebra gleichzeitig eine (komplexe) Basis in derjenigen Lie-Algebra ist, von der behauptet wird, sie sei die Komplexifizierung. Bei den Lie-Algebren $gl(n, \mathbb{R})$, $sl(n, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{R})$ und $sp(n, \mathbb{R})$ ist das unmittelbar klar.

$u(n)$: Wir wählen die Basis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (E_{(lk)} - E_{(kl)}), \quad \frac{1}{2} i (E_{(kl)} + E_{(lk)}), \quad k < l, \\ & i E_{(kk)}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Diese bildet offensichtlich auch eine komplexe Basis in $gl(n, \mathbb{C})$.

$su(n)$: Hier nehmen wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (E_{(lk)} - E_{(kl)}), \quad \frac{1}{2} i (E_{(kl)} + E_{(lk)}), \quad k < l \\ & i (E_{(kk)} - E_{k+1 k+1}) \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Da sich alle in (1.16) aufgeführten Operatoren als komplexe Linearkombinationen der Elemente der Basis (1.17) schreiben lassen, ist diese auch eine Basis in $sl(n, \mathbb{C})$

$sp(n)$: Wir schreiben $sp(n)$ in der Form (1.14). Unter Beachtung der Regel

$$(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)_{\mathbb{C}} = (\mathcal{L}_1)_{\mathbb{C}} \cap (\mathcal{L}_2)_{\mathbb{C}}$$

und der Bemerkung, daß die Elemente von $sp(n, \mathbb{C})$ spurfrei sind, erhalten wir

$$sp(n)_{\mathbb{C}} = \left(sp(n, \mathbb{C}) \cap su(2n) \right)_{\mathbb{C}} = sp(n, \mathbb{C}) \cap sl(2n, \mathbb{C}) = sp(n, \mathbb{C}). \quad \blacksquare$$

Im Satz finden wir Beispiele dafür, daß verschiedene reelle Lie-Algebren dieselbe Komplexifizierung haben können:

$$su(n)_{\mathbb{C}} = sl(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = sl(n, \mathbb{C}), \quad sp(n)_{\mathbb{C}} = sp(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = sp(n, \mathbb{C}).$$

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir uns die Lie-Algebren $su(2)$ und $su(3)$ (bzw. deren Komplexifizierungen) etwas genauer ansehen.

Die Lie-Algebren $su(2)$, $so(3)$ und $sl(2, \mathbb{C})$

Wir überlegen uns zuerst, daß $so(3)$ und $su(2)$ isomorph sind. Um das zu sehen, wählen wir eine Basis in $so(3)$:

$$I_1 := E_{(12)} - E_{(21)}, \quad I_2 := E_{(23)} - E_{(32)}, \quad I_3 := E_{(13)} - E_{(31)}.$$

Ausgeschrieben lautet sie

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Basiselemente genügen der Kommutatorrelation

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k.$$

In der $su(2)$ nehmen wir die Basis (1.17):

$$\mathbf{i}_1 := \frac{i}{2} (E_{(12)} + E_{(21)}), \quad \mathbf{i}_2 := \frac{1}{2} (E_{(21)} - E_{(12)}), \quad \mathbf{i}_3 := \frac{i}{2} (E_{(11)} - E_{(22)}).$$

Es gilt

$$\mathbf{i}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Mit den Pauli-Matrizen σ_k sind die Basiselemente $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ durch einen Faktor $\frac{i}{2}$ verknüpft:¹¹ $\mathbf{i}_k = \frac{i}{2} \sigma_k$, $k = 1, 2, 3$. Da die Basiselemente der Kommutatorrelation

$$[\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j] = \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}_k$$

genügen, erzeugt die Zuordnung $I_k \mapsto \mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, 3$, einen Isomorphismus zwischen $so(3)$ und $su(2)$.

Für die entsprechenden Lie-Gruppen, die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen im \mathbb{R}^3 und die Gruppe $SU(2)$ der spurfreien unitären Operatoren auf \mathbb{C}^2 , bedeutet dies, daß sie in einer Umgebung von $\mathbb{1}$ isomorph sind. Diese Tatsache hat eine wichtige Rolle bei der Einführung des Spins gespielt und begründet dessen Interpretation als "Eigendrehimpuls". Global unterscheiden sich die beiden Gruppen jedoch: $SU(2)$ ist einfach zusammenhängend, so daß jede Darstellung der Lie-Algebra eine Darstellung der Gruppe erzeugt. Bei $SO(3)$ gilt das nicht. Aus diesem Grunde gibt es zwar beliebige halbzahlige Spins, aber nur ganzzahlige Bahndrehimpulse.

Im übrigen sind $so(3)$ und $su(2)$ auch zur Algebra der Drehimpulsoperatoren aus Beispiel (4) zur Definition der Lie-Algebren isomorph. Das ist kein Zufall, denn die Algebra der Drehimpulsoperatoren ist in Wirklichkeit eine Darstellung der $so(3)$.

Nun wollen wir die innere Struktur von $su(2)$ etwas genauer analysieren. Dabei werden wir an diesem konkreten Beispiel schon einige der Begriffe, die wir im Kapitel 2 auf abstraktem Niveau einführen werden, vorwegnehmen. Da sich die Untersuchungen der folgenden Kapitel in dieser Form und diesem Umfang nur für *komplexe* Lie-Algebren durchführen lassen, studieren wir statt der reellen Lie-Algebren ihre Komplexifizierungen. Das ist insofern kein echtes Hindernis, als wir bei $so(n)$, $su(n)$ und $sp(n)$ auf kanonische Weise wieder zur reellen Algebra zurückkommen (siehe dazu Abschnitt 2.8).

Betrachten wir also $sl(2, \mathbb{C})$. Wir setzen $h_0 := i\mathbf{i}_3$ und untersuchen die Eigenwertgleichung

$$\text{ad}(h_0)x = \lambda x$$

des linearen Operators $\text{ad}(h_0)$. Wir finden die Eigenwerte $\lambda = +1, -1, 0$ zu den Eigenvektoren

$$e_+ := \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_1 + i\mathbf{i}_2), \quad e_- := \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{i}_1 + i\mathbf{i}_2), \quad h_0.$$

¹¹Beachte, daß die Pauli-Matrizen selbstadjungiert sind, also nicht zur $su(2)$, sondern zu deren Komplexifizierung $sl(2, \mathbb{C})$ gehören.

Diese drei Vektoren bilden eine Basis und genügen den Vertauschungsrelationen

$$[h_0, e_+] = e_+, \quad [h_0, e_-] = -e_-, \quad [e_+, e_-] = h_0. \quad (1.18)$$

Wir schreiben die Operatoren $\text{ad}(h_0)$, $\text{ad}(e_+)$, $\text{ad}(e_-)$ bezüglich dieser Basis als Matrizen

$$\text{ad}(h_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(e_+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(e_-) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und bestimmen die Werte der Killing-Form auf den Basiselementen:

$$(h_0, h_0) = 2, \quad (e_+, e_-) = 2, \quad (h_0, e_+) = (h_0, e_-) = (e_+, e_+) = (e_-, e_-) = 0. \quad (1.19)$$

Nun wollen wir diese Beobachtungen so umformulieren, daß wir sie später als konkrete Ausprägung einer allgemeinen Struktur wiedererkennen können. Betrachten wir dazu die Unterräume $H := \mathbb{C}h_0$ und $\mathcal{L}_\pm := \mathbb{C}e_\pm$. Es gilt:

1. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = H \oplus \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ (direkte Summe von Vektorräumen) (1.20)
2. \mathcal{L}_+ ist gemeinsamer Eigenraum aller Operatoren aus $\text{ad}(H)$. In dieser Eigenschaft definiert er ein lineares Funktional $\alpha \in H^*$ durch die Gleichung

$$\text{ad}(h)e_+ = \alpha(h)e_+ \quad \forall h \in H$$

(d. h. α ordnet jedem $h \in H$ den Eigenwert des Operators $\text{ad}(h)$ auf \mathcal{L}_+ zu). \mathcal{L}_- ist ebenfalls Eigenraum aller Operatoren aus $\text{ad}(H)$ und definiert auf analoge Weise das Funktional $-\alpha$.

3. Die Elemente von H , \mathcal{L}_+ und \mathcal{L}_- genügen nach (1.18) den Kommutatorrelationen

$$[h, x_\pm] = \pm\alpha(h)x_\pm, \quad [x_+, x_-] = \frac{1}{2}(x_+, x_-)h_0 \quad \forall h \in H, x_\pm \in \mathcal{L}_\pm.$$

4. Aus (1.19) ergeben sich die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$H \perp \mathcal{L}_+, \quad H \perp \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_+ \perp \mathcal{L}_+, \quad \mathcal{L}_- \perp \mathcal{L}_-.$$

Den Unterraum H nennen wir "Cartan-Unteralgebra", die Funktionale α , $-\alpha$ "Wurzeln"¹², die Unterräume \mathcal{L}_+ , \mathcal{L}_- "Wurzelunterräume" und die Zerlegung (1.20) "Wurzelraum-Zerlegung" (die allgemeine Definition dieser Begriffe folgt in Kapitel 2). Es wird sich zeigen, daß eine solche Struktur, wie wir sie hier gefunden haben, für komplexe halbeinfache Lie-Algebren typisch ist.

Wir machen darauf aufmerksam, daß die Konstruktion der Wurzeln und Wurzelunterräume nach der Fixierung der Cartan-Unteralgebra H automatisch abläuft. Könnten wir H auch anders wählen? Für $H = \mathbb{C}\mathbf{i}_2$ oder $H = \mathbb{C}\mathbf{i}_1$ z. B. erhält man eine zu (1.20) analoge Zerlegung mit denselben Vertauschungsrelationen. Für $H = \mathbb{C}(\mathbf{i}_1 + i\mathbf{i}_2)$ oder $H = \mathbb{C}(\mathbf{i}_1 - i\mathbf{i}_2)$ dagegen existiert keine Basis aus Eigenvektoren.

Eine für die Konstruktion der Wurzelraum-Zerlegung notwendige Bedingung ist, daß die Operatoren aus $\text{ad}(H)$ diagonalisierbar sind. Außerdem müssen sie kommutieren, d. h. H muß eine kommutative Unteralgebra sein. Im allgemeinen Fall ist es vernünftig, H maximal kommutativ zu wählen, da sonst der gemeinsame Eigenraum von $\text{ad}(H)$ zum Eigenwert 0 echt größer als H wäre und wir in der Wurzelraumzerlegung unnützerweise noch einen zusätzlichen Summanden aufführen müßten.

¹²Der Name rührt daher, daß die Zahlen $\alpha(h)$ für ein festes $h \in H$ Wurzeln der Säkulargleichung des Operators $\text{ad}(h)$ sind.

Die Lie-Algebren $su(3)$ und $sl(3, \mathbb{C})$

Als Basis in der $su(3)$ nehmen wir wieder (1.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{i}_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{i}_8 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die in der Physik benutzten Gell-Mann-Matrizen λ_i , $i = 1, \dots, 8$, die analog den Pauli-Matrizen bei $su(2)$ eine Basis in der Komplexifizierung, nicht in $su(3)$ selbst bilden, hängen mit den Basiselementen $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_8$ wie folgt zusammen: $\lambda_k = -2i \mathbf{i}_k$, $k = 1, \dots, 7$ und $\lambda_8 = -2i (\mathbf{i}_3 + 2 \mathbf{i}_8)$.

(ÜA) Man berechne die Kommutatorrelationen der Basis $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_8$.

Nun gehen wir wieder zur Komplexifizierung $su(3)_{\mathbb{C}} = sl(3, \mathbb{C})$ über und wollen eine analoge Zerlegung wie für $sl(2, \mathbb{C})$ konstruieren. Als maximale kommutative Unteralgebra bietet sich $H := \text{span}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_8\}$ an. Wir setzen $h_1 := i \mathbf{i}_3$, $h_2 := i \mathbf{i}_8$. Um gemeinsame Eigenvektoren von $\text{ad}(H)$ zu finden, betrachten wir die folgenden drei Einbettungen von $sl(2, \mathbb{C})$:

$$A \xrightarrow{\varphi_1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \xrightarrow{\varphi_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A \xrightarrow{\varphi_3} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen h_0, e_+, e_- die im vorangegangenen Abschnitt definierten $sl(2, \mathbb{C})$ -Elemente, so gilt offenbar $h_1 = \varphi_1 h_0$ und $h_2 = \varphi_2 h_0$. Damit sind

$$\varphi_1 e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_1 + i \mathbf{i}_2) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_1 e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{i}_1 + i \mathbf{i}_2)$$

Eigenvektoren von $\text{ad}(h_1)$ zu den Eigenwerten $+1$ bzw. -1 . Weiterhin berechnen wir

$$[h_2, \varphi_1 e_+] = -\frac{1}{2} \varphi_1 e_+, \quad [h_2, \varphi_1 e_-] = \frac{1}{2} \varphi_1 e_-.$$

Die Elemente $\varphi_1 e_+$ und $\varphi_1 e_-$ sind also auch Eigenvektoren von $\text{ad}(h_2)$ und damit von ganz $\text{ad}(H)$. Sie definieren folglich Wurzeln $\alpha_1, -\alpha_1 \in H^*$, die auf den Basiselementen h_1, h_2 in H folgende Werte annehmen:

$$\alpha_1(h_1) = 1, \quad \alpha_1(h_2) = -1/2.$$

In analoger Weise verifizieren wir, daß auch $\varphi_2 e_{\pm}$ bzw. $\varphi_3 e_{\pm}$ gemeinsame Eigenvektoren von $\text{ad}(H)$ sind und Wurzeln $\pm\alpha_2$ bzw. $\pm\alpha_3$ mit

$$\alpha_2(h_1) = -1/2, \quad \alpha_2(h_2) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_3(h_1) = 1/2, \quad \alpha_2(h_2) = 1/2$$

induzieren. Wegen $\dim(H) = 2$ können $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nicht linear unabhängig sein; tatsächlich finden wir $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Da alle sechs Wurzeln voneinander verschieden sind, erzeugt jeder der entsprechenden Eigenvektoren einen separaten eindimensionalen Eigenraum $\mathcal{L}_{\pm\alpha_j} := \mathbb{C}\varphi_j e_{\pm}$. Bezeichnen

wir die Menge der Wurzeln mit Σ , dann ist die Wurzelraum-Zerlegung von $sl(3, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$sl(3, \mathbb{C}) = H \oplus_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{L}_\alpha.$$

(ÜA) (a) Wir setzen $\mathcal{L}_\varrho = \{0\}$ für jedes $\varrho \in H^*$, welches keine Wurzel ist. Man verifiziere

$$[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subseteq \mathcal{L}_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma, \quad \alpha \neq -\beta.$$

(b) man schreibe die Operatoren $\text{ad}(h_1)$, $\text{ad}(h_2)$ und $\text{ad}(\varphi_j e_\pm)$, $j = 1, 2, 3$ bezüglich der Basis $h_1, h_2, \varphi_j e_\pm$, $j = 1, 2, 3$, als Matrizen auf und berechne die Werte der Killing-Form auf den Basiselementen. Man prüfe damit

$$H \perp \mathcal{L}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Sigma, \quad \mathcal{L}_\alpha \perp \mathcal{L}_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma, \quad \alpha \neq -\beta.$$

(c) Die Gleichung

$$(h_\varrho, h') = \varrho(h') \quad \forall h' \in H$$

definiert einen Isomorphismus $H^* \ni \varrho \mapsto h_\varrho \in H$. Man bestimme die Vektoren h_α , $\alpha \in \Sigma$, als Linearkombinationen von h_1, h_2 und zeige, daß gilt

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = (x_\alpha, x_{-\alpha}) \frac{1}{2} h_\alpha \quad \forall \alpha \in \Sigma, \quad x_{\pm\alpha} \in \mathcal{L}_{\pm\alpha}.$$

Kapitel 2

Wurzelstruktur

Von nun an werden wir uns nur noch mit komplexen halbeinfachen Lie-Algebren beschäftigen. (An die Stelle der komplexen Zahlen könnte man auch gewisse andere algebraisch vollständige Körper setzen, vgl. dazu z. B. [Hu], Vorwort zum Kapitel II, S. 15 oder [Ja1], Vorwort zum Kapitel IV, S. 107.) Die Resultate, die wir erhalten werden, lassen sich ohne Einschränkungen zumindest auf die kompakten Lie-Algebren, die in der Eichtheorie ja relevant sind, anwenden. Wie das geschieht, werden wir uns im Abschnitt 2.8 ansehen.

2.1 Cartan-Unteralgebren und Wurzeln

Üblicherweise definiert man Cartan-Unteralgebren als nilpotente Unteralgebren, die mit ihrem Normalisator zusammenfallen. Wir geben stattdessen eine Definition, die auf den Fall halbeinfacher komplexer Lie-Algebren zugeschnitten ist und unmittelbar diejenigen Eigenschaften von Cartan-Unteralgebren liefert, die die Grundlage für die anschließende Strukturtheorie bilden. An geeigneter Stelle (Satz 2.3) prüfen wir die Äquivalenz der beiden Herangehensweisen.

Jordan-Zerlegung in einer halbeinfachen Lie-Algebra

Sei \mathcal{L} vorerst eine beliebige Lie-Algebra. Ein Element $x \in \mathcal{L}$ heißt *halbeinfach*, falls der lineare Operator $\text{ad}(x)$ auf \mathcal{L} halbeinfach¹ ist und *nilpotent*, falls $\text{ad}(x)$ nilpotent ist. Ist $x \in \mathcal{L}$ beliebig, dann wissen wir aus der linearen Algebra, daß es zu $\text{ad}(x)$ einen eindeutig bestimmten halbeinfachen Operator $\text{ad}(x)_s$ und einen eindeutig bestimmten nilpotenten Operator $\text{ad}(x)_n$ gibt, so daß gilt

$$\text{ad}(x) = \text{ad}(x)_s + \text{ad}(x)_n, \quad [\text{ad}(x)_s, \text{ad}(x)_n] = 0.$$

Diese Zerlegung heißt *Jordan-Zerlegung*. Die Operatoren $\text{ad}(x)_s$ und $\text{ad}(x)_n$ erhält man auf folgende Weise: es gibt eine Basis in \mathcal{L} , in der die Matrix von $\text{ad}(x)$ Jordan-Normalform hat:

$$\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \lambda & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

¹d. h. diagonalisierbar

Sie läßt sich dann eindeutig in eine Diagonalmatrix und eine obere Dreiecksmatrix zerlegen. Erstere definiert den Operator $\text{ad}(x)_s$, letztere den Operator $\text{ad}(x)_n$.

Im allgemeinen kann man nicht erwarten, daß $\text{ad}(x)_s$ und $\text{ad}(x)_n$ wieder in $\text{ad}(\mathcal{L})$ liegen, d. h. daß Elemente $x_s, x_n \in \mathcal{L}$ mit $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$ und $\text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n)$ existieren. Ist jedoch \mathcal{L} halbeinfach, dann gilt

Satz 2.1 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und sei $x \in \mathcal{L}$.*

(a) *Es gibt genau ein halbeinfaches Element $x_s \in \mathcal{L}$ und genau ein nilpotentes Element $x_n \in \mathcal{L}$, so daß $x = x_s + x_n$ und $[x_s, x_n] = 0$.*

(b) *Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} und sei $f(x) = f(x)_s + f(x)_n$ die Jordan-Zerlegung des Operators $f(x)$ in $\text{End}(V)$. Es gilt $f(x)_s = f(x_s)$ und $f(x)_n = f(x_n)$.*

Die Zerlegung $x = x_s + x_n$ heißt ebenfalls *Jordan-Zerlegung*.

BEWEIS:

zu (a): Es genügt zu zeigen, daß der halbeinfache und der nilpotente Teil einer Derivation auf einer Algebra wieder Derivationen sind. Dann folgt nämlich aus Satz 1.11, daß zu jedem $x \in \mathcal{L}$ Elemente $x_s, x_n \in \mathcal{L}$ mit $\text{ad}(x)_s = \text{ad}(x_s)$ und $\text{ad}(x)_n = \text{ad}(x_n)$ existieren. Wegen der Injektivität der adjungierten Darstellung sind diese eindeutig bestimmt und es gilt $x = x_s + x_n$ sowie $[x_s, x_n] = 0$.

Sei also \mathcal{A} eine Algebra und d eine Derivation auf \mathcal{A} mit der Jordan-Zerlegung $d = d_s + d_n$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ setzen wir $\mathcal{A}_\lambda := \{x \in \mathcal{A} : \exists k \in \mathbb{N} : (d - \lambda \text{id}_\mathcal{A})^k x = 0\}$. Ist λ ein Eigenwert von d , dann ist \mathcal{A}_λ der zugehörige Hauptraum von d und gleichzeitig *Eigenraum* von d_s ; ansonsten ist $\mathcal{A}_\lambda = \{0\}$. Daher haben wir $\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} \mathcal{A}_\lambda$ (‡) und $d_s|_{\mathcal{A}_\lambda} = \lambda \text{id}_{\mathcal{A}_\lambda}$ (die Summe ist in Wirklichkeit endlich). Aus der Beziehung

$(d - (\lambda + \mu) \text{id}_\mathcal{A})^n (x \cdot y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((d - \lambda \text{id}_\mathcal{A})^{n-k} x) \cdot ((d - \mu \text{id}_\mathcal{A})^k y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
die man am einfachsten mit Induktion prüft, folgt $\mathcal{A}_\lambda \cdot \mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{\lambda+\mu}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Seien nun $x, y \in \mathcal{A}$ gegeben. Wir zerlegen sie nach (‡) und berechnen

$$\begin{aligned} d_s(x \cdot y) &= \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{K}} d_s(x_\lambda \cdot y_\mu) = \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{K}} (\lambda + \mu) x_\lambda \cdot y_\mu = \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{K}} (\lambda x_\lambda \cdot y_\mu + x_\lambda \cdot \mu y_\mu) \\ &= \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{K}} (d_s x_\lambda \cdot y_\mu + x_\lambda \cdot d_s y_\mu) = d_s x \cdot y + x \cdot d_s y, \end{aligned}$$

Damit ist d_s (und folglich auch d_n) eine Derivation.

zu (b): Siehe [Hu, §6.4]. ■

Cartan-Unteralgebren

Sei $\mathcal{L} \neq \{0\}$ halbeinfach. Enthielte \mathcal{L} keine halbeinfachen Elemente, dann wären nach Satz 2.1 alle Elemente nilpotent, im Widerspruch zum *Satz von Engel*:

Eine Lie-Algebra, deren Elemente sämtlich nilpotent sind, ist nilpotent.

[HN, Kor. II.2.6]

\mathcal{L} besitzt also halbeinfache Elemente x_s und damit auch nichttriviale Unteralgebren, die ausschließlich aus halbeinfachen Elementen besteht (z. B. $\mathbb{C}x_s$). Eine maximale solche Unteralgebra nennen wir *Cartan-Unteralgebra*. Cartan-Unteralgebren bezeichnen wir gewöhnlich mit dem Buchstaben H . Die folgende Feststellung ist für alles Weitere von fundamentaler Bedeutung:

Satz 2.2 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Eine Unteralgebra, die aus halbeinfachen Elementen besteht, ist kommutativ.*

BEWEIS: Sei \mathcal{A} eine Unteralgebra aus halbeinfachen Elementen und sei $x \in \mathcal{A}$. In \mathcal{A} gibt es eine Basis aus Eigenvektoren des Operators $\text{ad}_{\mathcal{A}}(x)$. Es genügt daher zu zeigen, daß $\text{ad}_{\mathcal{A}}(x)$ keinen von 0 verschiedenen Eigenwert besitzt. Nehmen wir im Gegenteil an, es gibt ein $y \in \mathcal{A}$ mit $\text{ad}(x)y = \lambda y$, $\lambda \neq 0$. Dann gilt

$$(i) \text{ad}_{\mathcal{A}}(y)x = -\lambda y \neq 0 \quad (ii) \text{ad}_{\mathcal{A}}(y)^2 x = 0.$$

Sei $\{z_i\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\text{ad}_{\mathcal{A}}(y)$ in \mathcal{A} und seien $\{\mu_i\}$ die zugehörigen Eigenwerte. Wir entwickeln $x = \sum_i \xi^i z_i$. Aus (ii) folgt $\text{ad}_{\mathcal{A}}(y)^2 x = \sum_i \xi^i \mu_i^2 z_i = 0$. Dann ist aber auch $\text{ad}_{\mathcal{A}}(y)x = \sum_i \xi^i \mu_i z_i = 0$, im Widerspruch zu (i). ■

Wurzeln

Sei eine Cartan-Unteralgebra H vorgegeben. Da $\text{ad}(H)$ eine kommutative Algebra von diagonalisierbaren Operatoren auf dem komplexen Vektorraum \mathcal{L} ist, existiert eine Zerlegung $\mathcal{L} = \bigoplus_i \mathcal{L}_i$ in gemeinsame Eigenräume. Jeder Eigenraum \mathcal{L}_i definiert eine Abbildung $\alpha_i : H \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$\text{ad}(h)x_i = \alpha_i(h)x_i \quad \forall h \in H, x \in \mathcal{L}_i$$

(α_i ordnet jedem $h \in H$ den Eigenwert des Operators $\text{ad}(h)$ auf dem Eigenraum \mathcal{L}_i zu). Die Abbildung α_i ist linear:

$$\alpha_i(\lambda h_1 + h_2) x_i = \text{ad}(\lambda h_1 + h_2) x_i = \lambda \text{ad}(h_1) x_i + \text{ad}(h_2) x_i = (\lambda \alpha_i(h_1) + \alpha_i(h_2)) x_i.$$

Wir geben nun eine abstrakte Konstruktion der Eigenräume: Für Funktionale $\varrho \in H^*$ sei

$$\mathcal{L}_{\varrho} := \{y \in \mathcal{L} : \text{ad}(h)y = \varrho(h)y\}.$$

Ein Funktional ϱ heißt *Wurzel*, falls $\varrho \neq 0$ und $\mathcal{L}_{\varrho} \neq 0$ ist. In diesem Fall wird \mathcal{L}_{ϱ} *Wurzelunterraum* genannt; die Elemente von \mathcal{L}_{ϱ} heißen *Wurzelvektoren*. Das System der Wurzeln bezeichnen wir mit Σ .

Offensichtlich ist $\mathcal{L}_0 = Z_{\mathcal{L}}(H)$ der gemeinsame Eigenraum von $\text{ad}(H)$ zum Eigenwert 0. Die anderen gemeinsamen Eigenräume sind gerade durch die Wurzelunterräume gegeben. Damit besitzt \mathcal{L} die *Wurzelraum-Zerlegung*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{L}_{\alpha}. \quad (2.1)$$

Man kann zeigen, daß die Wurzelunterräume \mathcal{L}_{α} , $\alpha \in \Sigma$, eindimensional sind (vgl. z. B. [Hu, §8.4]). Dies folgt auch schon daraus, daß für ein generisches $h \in H$ die Eigenwerte von $\text{ad}(h)$, d. h. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (1.4), sämtlich nicht entartet sind.

Äquivalente Charakterisierungen von Cartan-Unteralgebren im halbeinfachen Fall

Satz 2.3 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und $H \subseteq \mathcal{L}$ eine Unteralgebra. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) H ist eine Cartan-Unteralgebra.
- (b) H enthält ausschließlich halbeinfache Elemente und es gilt $Z_{\mathcal{L}}(H) = H$ |².
- (c) H ist nilpotent und es gilt $N_{\mathcal{L}}(H) = H$.

²d. h. H ist eine maximale kommutative Unteralgebra

BEMERKUNGEN:

1. Wie wir schon bemerkt hatten, ist (c) die Definition des Begriffes Cartan-Unteralgebra im allgemeinen, nicht notwendig halbeinfachen Fall. Man beachte, daß Cartan-Unteralgebren dann nicht mehr unbedingt kommutativ sein müssen.
2. Eine weitere Charakterisierung von Cartan-Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren enthält Satz 2.27 im Abschnitt 2.7.

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b): Sei \mathcal{L} eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ . Wir verwenden die Abkürzung $Z := Z_{\mathcal{L}}(H)$. Die Inklusion $H \subseteq Z$ ist offensichtlich. Um $H = Z$ zu erhalten, zeigen wir, daß ein beliebiges Element $z \in Z$ halbeinfach ist: Betrachten wir dazu die Wurzelraum-Zerlegung (2.1) bezüglich H (man beachte $\mathcal{L}_0 = Z$). Da $\text{ad}(z)$ mit $\text{ad}(H)$ kommutiert, sind die Wurzelunterräume \mathcal{L}_{α} , $\alpha \in \Sigma$, invariant unter $\text{ad}(z)$. Da sie eindimensional sind, sind sie sogar Eigenräume von $\text{ad}(z)$. Könnten wir beweisen, daß Z kommutativ ist, dann wäre auch Z Eigenraum von $\text{ad}(z)$ und somit $\text{ad}(z)$, wie behauptet, diagonalisierbar.

Zeigen wir also $[Z, Z] = \{0\}$:

1. $[Z, Z]$ ist Ideal in \mathcal{L} : Da die Wurzelunterräume \mathcal{L}_{α} Eigenräume von $\text{ad}(z)$, $z \in Z$ sind, gilt $\text{ad}([z, z'])|_{\mathcal{L}_{\alpha}} = 0 \quad \forall z, z' \in Z$. Mit der Wurzelraumzerlegung (2.1) folgt

$$[[Z, Z], \mathcal{L}] = [[Z, Z], Z] \subseteq [Z, Z].$$

2. $[Z, Z]$ ist auflösbar (und damit $[Z, Z] = \{0\}$): Sei $z \in Z$ und sei $z = z_s + z_n$ die Jordan-Zerlegung von z in \mathcal{L} . In der linearen Algebra wird gezeigt, daß der halbeinfache und der nilpotente Teil eines linearen Operators T mit allen Operatoren vertauschen, mit denen T vertauscht. Folglich sind $z_s, z_n \in Z$. Insbesondere ist $z_s + h$ für alle $h \in H$ halbeinfach³ und aus der Maximalität von H folgt $z_s \in H$. Damit gilt $\text{ad}_Z(z) = \text{ad}_{\mathcal{L}}(z)|_Z = \text{ad}_Z(z_n)$, d. h. die Elemente der Lie-Algebra Z sind alle nilpotent. Nach Satz von Engel (vgl. S. 28) ist dann Z nilpotent, folglich $[Z, Z]$ nilpotent und erst recht auflösbar.

(b) \Rightarrow (a): Erfülle H die Bedingung (b). Dann gibt es eine Cartan-Unteralgebra H' mit $H \subseteq H'$. Es folgt $H' \subseteq Z_{\mathcal{L}}(H') \subseteq Z_{\mathcal{L}}(H) = H$, also $H = H'$.

(a) \Rightarrow (c): Sei H eine Cartan-Unteralgebra und Σ das zugehörige Wurzelsystem. Ein $x \in \mathcal{L}$ entwickeln wir nach der Wurzelraum-Zerlegung (2.1) in $x = x_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma} x_{\alpha}$ und berechnen $[h, x] = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(h)x_{\alpha}$. Soll $x \in N_{\mathcal{L}}(H)$, d. h. $[H, x] \subseteq H$ sein, dann muß $x_{\alpha} = 0$ gelten für alle $\alpha \in \Sigma$. Damit ist $N_{\mathcal{L}}(H) \subseteq H$. (Die umgekehrte Inklusion gilt immer.)

(c) \Rightarrow (a): siehe [Hu, §15.3] ■

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch zwei wichtige Formeln notieren:

1. Mit Satz 2.3 (b) erhält die Wurzelraum-Zerlegung (2.1) die Gestalt

$$\mathcal{L} = H \oplus_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{L}_{\alpha}. \quad (2.2)$$

2. Für die Einschränkung der Killing-Form auf H gilt offensichtlich

$$(h_1, h_2) = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(h_1) \alpha(h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in H. \quad (2.3)$$

³Die Summe zweier kommutierender diagonalisierbarer Operatoren ist wieder diagonalisierbar.

2.2 Eigenschaften von Wurzelsystemen, Teil I

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ . Wir werden uns jetzt schrittweise mit der Struktur von H , Σ und der zugehörigen Wurzelraumzerlegung vertraut machen.

$$(1) \quad [\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subseteq \mathcal{L}_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma.$$

Insbesondere sind Wurzelvektoren nilpotent in \mathcal{L} .

Ist $[x_\alpha, x_\beta] = 0$ für alle $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$, $x_\beta \in \mathcal{L}_\beta$, so ist nichts zu zeigen. Sei deshalb $[x_\alpha, x_\beta] \neq 0$ für ein gewisses Paar x_α, x_β . Die Jacobi-Identität liefert $\text{ad}(h)[x_\alpha, x_\beta] = (\alpha + \beta)(h)[x_\alpha, x_\beta] \forall h \in H$, d. h. $[x_\alpha, x_\beta] \in \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$. ■

$$(2) \quad \mathcal{L}_\alpha \perp H \quad \forall \alpha \in \Sigma, \quad \mathcal{L}_\alpha \perp \mathcal{L}_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma, \alpha + \beta \neq 0$$

Um die erste Behauptung einzusehen, wählen wir ein $h_0 \in H$ mit $\alpha(h_0) \neq 0$ und berechnen

$$(x_\alpha, h) = \frac{1}{\alpha(h_0)}([h_0, x_\alpha], h) = -\frac{1}{\alpha(h_0)}(x_\alpha, [h_0, h]) = 0 \quad \forall h \in H, x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha.$$

Für die zweite Behauptung modifizieren wir h_0 so, daß zusätzlich auch $\beta(h_0) \neq 0$ gilt und erhalten analog

$$(x_\alpha, x_\beta) = \frac{1}{\alpha(h_0)}([h_0, x_\alpha], x_\beta) = \frac{1}{\alpha(h_0)}(h_0, [x_\alpha, x_\beta]) \quad \forall x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha, x_\beta \in \mathcal{L}_\beta.$$

Wegen $[x_\alpha, x_\beta] \in \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ und $H \perp \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ ⁴ verschwindet die rechte Seite. ■

Eigenschaft (2) impliziert insbesondere $\mathcal{L}_\alpha \perp \mathcal{L}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Sigma$.

(3) Die Einschränkung der Killing-Form auf H ist nicht ausgeartet.

Sei $H^\perp := \{h \in H : (h, H)_\mathcal{L} = \{0\}\}$. Unter Verwendung der Wurzelraum-Zerlegung (2.2) folgt aus (2) $H^\perp \perp \mathcal{L}$, also $H^\perp = 0$. ■

Damit induziert die Einschränkung der Killing-Form auf H einen Isomorphismus

$$H \rightarrow H^*, \quad h \mapsto (h, \cdot). \quad (2.4)$$

Das Bild eines Elementes $h \in H$ unter diesem Isomorphismus bezeichnen wir mit ϱ_h , das Urbild eines Funktionales ϱ mit h_ϱ . Die Urbilder h_α von Wurzeln $\alpha \in \Sigma$ heißen *Cartan-Elemente*. Es gilt

$$(h_\varrho, h) = \varrho(h) \quad \forall \varrho \in H^*, h \in H.$$

Die Killing-Form definiert desweiteren eine Bilinearform (ϱ, ϱ') auf H^* durch

$$(\varrho, \varrho') := (h_\varrho, h_{\varrho'}).$$

Diese ist ebenfalls symmetrisch und nicht ausgeartet; wir nennen sie abkürzend "Killing-Form auf H^* ". Aus Gleichung (2.3) ergibt sich die Rechenregel

$$(\varrho, \varrho') = \sum_{\alpha \in \Sigma} (\alpha, \varrho) (\alpha, \varrho'). \quad (2.5)$$

⁴im Fall $\alpha + \beta \notin \Sigma$ ist dies in trivialer Weise erfüllt

Man beachte:

1. Sowohl die Cartan-Elemente h_α , als auch die induzierte Bilinearform auf H^* hängen von dem Isomorphismus $H \rightarrow H^*$, den man zugrunde gelegt hat, ab. Im Prinzip kann man diesen Isomorphismus nämlich durch *irgendeine* nicht ausgeartete ISBLF auf \mathcal{L} definieren (was wir später auch tun werden).
2. Weder die Killing-Form noch die von ihr auf H^* induzierte Bilinearform sind Skalarprodukte; die Zahlen (h, h) bzw. (ϱ, ϱ) müssen nicht einmal reell sein.

$$(4) \quad H^* = \text{span}_{\mathbb{C}} \Sigma$$

Wäre das nicht so, gäbe es ein $h \in H$, $h \neq 0$, mit $\alpha(h) = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma$. Aus Gleichung (2.3) folgte dann $h \perp H$, im Widerspruch zur Eigenschaft (3). ■

(5) *Es gilt $\Sigma = -\Sigma$. Für $\alpha \in \Sigma$ ist die Abbildung $\mathcal{L}_{-\alpha} \rightarrow \mathcal{L}_\alpha^*$, $x \mapsto (x, \cdot)$, ein Isomorphismus.*

Wäre $\alpha \in \Sigma$ und $-\alpha \notin \Sigma$, dann wäre $\alpha + \beta \neq 0$ für beliebige Wurzeln $\beta \in \Sigma$. Aus der Wurzelraumzerlegung (2.2) und der Eigenschaft (2) folgte $\mathcal{L}_\alpha \perp \mathcal{L}$ und damit $\mathcal{L}_\alpha = 0$, im Widerspruch zu $\alpha \in \Sigma$. Also gilt $-\alpha \in \Sigma$ und $\mathcal{L}_\alpha \not\perp \mathcal{L}_{-\alpha}$. Aus $\dim(\mathcal{L}_\alpha) = \dim(\mathcal{L}_{-\alpha}) = 1$ ergibt sich der zweite Teil der Behauptung. ■

Damit gilt insbesondere $(x_{-\alpha}, x_\alpha) \neq 0 \quad \forall x_{\pm\alpha} \in \mathcal{L}_{\pm\alpha}, x_{\pm\alpha} \neq 0$.

$$(6) \quad [x_\alpha, x_{-\alpha}] = (x_\alpha, x_{-\alpha}) h_\alpha \quad \forall x_{\pm\alpha} \in \mathcal{L}_{\pm\alpha}.$$

Es gilt $([x_\alpha, x_{-\alpha}], h) = (x_{-\alpha}, [h, x_\alpha]) = (x_{-\alpha}, \alpha(h) x_\alpha) = ((x_{-\alpha}, x_\alpha) h_\alpha, h) \quad \forall h \in H$. Da die Killing-Form auf H nicht ausgeartet ist, impliziert das die Behauptung. ■

Ein System von Wurzelvektoren $\{x_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ mit der Eigenschaft $(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 1 \quad \forall \alpha \in \Sigma$ nennen wir *System normierter Wurzelvektoren*; seine Elemente bezeichnen wir mit e_α . Sei im weiteren ein solches System fixiert.

$$(7) \quad (\alpha, \alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma$$

Sei $\alpha \in \Sigma$. Sei $\beta \in \Sigma$ eine weitere Wurzel (nicht notwendig verschieden von α). Wir betrachten die Folge $\{\beta + k\alpha : k \in \mathbb{Z}\}$ von Funktionalen auf H . Da Σ endlich ist, gibt es natürliche Zahlen r bzw. q , so daß gilt

$$\mathcal{L}_{\beta-r\alpha} \neq 0, \quad \text{ad}(\mathcal{L}_{-\alpha}) \mathcal{L}_{\beta-r\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}_{\beta+q\alpha} \neq 0, \quad \text{ad}(\mathcal{L}_\alpha) \mathcal{L}_{\beta+q\alpha} = 0.$$

Wir bilden den Unterraum $V := H \oplus_{k=-r}^q \mathcal{L}_{\alpha+k\beta}$. Da V invariant unter der Wirkung von $\text{ad}(h_\alpha)$, $\text{ad}(e_\alpha)$ und $\text{ad}(e_{-\alpha})$ ist, gilt $\text{tr}_V(\text{ad}(h_\alpha)) = \text{tr}_V([\text{ad}(e_\alpha), \text{ad}(e_{-\alpha})]) = 0$. Nach Konstruktion von V haben wir andererseits

$$\text{tr}_V(\text{ad}(h_\alpha)) = \sum_{k=-r}^q \alpha(h_\alpha) + k\beta(h_\alpha) = \sum_{k=-r}^q (\alpha + k\beta, \alpha).$$

Wir folgern $2(\beta, \alpha) = (r - q)(\alpha, \alpha)$ und lesen ab, daß $(\alpha, \alpha) \neq 0$ sein muß, sobald es ein $\beta \in \Sigma$ mit $(\beta, \alpha) \neq 0$ gibt. Das ist aber wegen (3) und (4) immer erfüllt. ■

(8) *Sei $\alpha \in \Sigma$ und k eine ganze Zahl. Ist $k\alpha \in \Sigma$, dann ist $k = 1$ oder $k = -1$.*

Wir argumentieren ähnlich wie im vorangegangenen Punkt. Sei diesmal

$$V := \mathcal{L}_\alpha \oplus H \oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{-k\alpha}.$$

Dann ist $0 = \text{tr}_V(\text{ad}(h_\alpha)) = (1 - \sum_{k=1}^{\infty} k \dim(\mathcal{L}_{-k\alpha})) (\alpha, \alpha)$. Aus $\dim(\mathcal{L}_{-\alpha}) = 1$ und $(\alpha, \alpha) \neq 0$ folgt $\mathcal{L}_{-k\alpha} = 0$ für alle $k > 1$, d. h. die Funktionale $-k\alpha$, $k > 1$, sind keine Wurzeln. Wegen (5) sind dann auch die Funktionale $k\alpha$, $k > 1$, keine Wurzeln. ■

2.3 Gewichte und Wurzelfolgen

Wir wollen jetzt den Begriff der Wurzel von der adjungierten Darstellung auf beliebige Darstellung verallgemeinern. Sei dazu H wieder eine Cartan-Unteralgebra und Σ das zugehörige Wurzelsystem.

Gewichte

Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Da $f(H)$ nach Satz 2.1 (b) eine kommutative Algebra diagonalisierbarer linearer Operatoren auf einem komplexen Vektorraum ist, gibt es eine Zerlegung von V in gemeinsame Eigenräume. Jeder dieser Eigenräume induziert ein Eigenwertfunktional $\mu \in H^*$. Analog zur adjungierten Darstellung definieren wir daher für $\varrho \in H^*$

$$V_\varrho := \{v \in V : f(h)v = \varrho(h)v\}.$$

Das Funktional ϱ heißt *Gewicht* der Darstellung (V, f) , falls $V_\varrho \neq \{0\}$ ist. In diesem Fall nennt man V_ϱ *Gewichtsunterraum* und die Elemente von V_ϱ *Gewichtsvektoren*. Die Zahl

$$m(\varrho) := \dim(V_\varrho)$$

heißt *Vielfachheit* des Gewichtes ϱ . Das System der Gewichte der Darstellung f bezeichnen wir mit $\Gamma(f)$.

BEMERKUNGEN:

1. Die Gewichtsunterräume mit den zugehörigen Gewichten sind gerade die gemeinsamen Eigenräume von $f(H)$ mit den zugehörigen Eigenwertfunktionalen. Die Eigenraumzerlegung von V heißt deshalb *Gewichtsraumzerlegung* und schreibt sich

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} V_\mu. \quad (2.6)$$

2. Zu beachten ist, daß bei Gewichten, im Gegensatz zu den Wurzeln, $\mu = 0$ auftreten kann. Das Wurzelsystem Σ von \mathcal{L} unterscheidet sich deshalb vom Gewichtssystem $\Gamma(\text{ad}_{\mathcal{L}})$ der adjungierten Darstellung um das Gewicht 0. Identifiziert man H mit dem entsprechenden Gewichtsunterraum, so ist die Wurzelraumzerlegung (2.2) identisch mit der Gewichtsraum-Zerlegung (2.6) der adjungierten Darstellung.

3. Für die Einschränkung der zu (V, f) assoziierten Spurform B_f (1.5) auf H gilt

$$B_f(h, h') = \sum_{\mu \in \Gamma(f)} m(\mu) \mu(h)\mu(h'). \quad (2.7)$$

4. Sei $\alpha \in \Sigma$ und $\mu \in \Gamma(f)$. Für $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ berechnen wir

$$f(h) f(y_\alpha) v_\mu = f(y_\alpha) f(h) v_\mu + f([h, y_\alpha]) v_\mu = (\mu + \alpha)(h) f(y_\alpha) v_\mu \quad \forall h \in H, v_\mu \in V_\mu.$$

Die Wurzelvektoren wirken also folgendermaßen auf die Gewichtsunterräume:

$$f(\mathcal{L}_\alpha) V_\mu \subseteq V_{\mu+\alpha}. \quad (2.8)$$

Wir wollen nun das Gewichtssystem $\Gamma(f)$ untersuchen. Sei dazu $\alpha \in \Sigma$. Zu α ist in natürlicher Weise eine Unteralgebra von \mathcal{L} assoziiert:

$$\mathcal{L}_{(\alpha)} := \mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{L}_{-\alpha} \oplus [\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{-\alpha}]. \quad (2.9)$$

Wir überlegen uns, daß $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ zur Lie-Algebra $sl(2, \mathbb{C})$ isomorph (und damit insbesondere halbeinfach) ist: Sind $e_\alpha, e_{-\alpha}$ normierte Wurzelvektoren und bezeichnen h_0, e_+ bzw. e_- die in Abschnitt 1.4 definierten $sl(2, \mathbb{C})$ -Elemente, dann wird ein Isomorphismus erzeugt durch

$$h_\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)h_0, \quad e_\alpha \mapsto \sqrt{(\alpha, \alpha)}e_+, \quad e_{-\alpha} \mapsto \sqrt{(\alpha, \alpha)}e_-.$$

Sei $\mu \in \Gamma(f)$. Nach Gleichung (2.8) erzeugt die Anwendung der Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ auf den Gewichtsunterraum V_μ eine sogenannte *Wurzelfolge* $\mu - r\alpha, \dots, \mu, \dots, \mu + q\alpha$ von Gewichten. Wurzelfolgen spielen eine wichtige Rolle in der Darstellungstheorie. Bevor wir sie aber anwenden können, müssen wir sie exakt definieren. Zu diesem Zweck untersuchen wir zunächst die von (V, f) induzierte Darstellung $(V, f|_{\mathcal{L}_{(\alpha)}})$ der Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$.

Darstellungen der Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$

Lemma 2.4 *Die induzierte Darstellung $(V, f|_{\mathcal{L}_{(\alpha)}})$ der Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ ist vollständig reduzibel. In jedem irreduziblen Unterraum V_a gibt es eine Basis $\{u_0^{(a)}, \dots, u_{r_a}^{(a)}\}$ aus Gewichtsvektoren der Darstellung (V, f) von \mathcal{L} , die folgenden Relationen genügt:*

$$\begin{aligned} f(h_\alpha) u_k^{(a)} &= (\mu^{(a)} - k\alpha, \alpha) u_k^{(a)} && (\mu^{(a)} \text{ ist das Gewicht von } u_0^{(a)}) \\ f(e_{-\alpha}) u_k^{(a)} &= u_{k+1}^{(a)}, \quad k = 1, \dots, r_a - 1, && f(e_{-\alpha}) u_{r_a}^{(a)} = 0, \\ f(e_\alpha) u_k^{(a)} &= k((\mu^{(a)}, \alpha) - \frac{1}{2}(k-1)(\alpha, \alpha)) u_{k-1}^{(a)}, \quad k = 1, \dots, r_a && f(e_\alpha) u_0^{(a)} = 0. \end{aligned}$$

BEWEIS: Wir geben ein Verfahren zur Ausreduktion an. Seien $e_\alpha, e_{-\alpha}$ normiert.

• Wir betrachten den Unterraum $N_\alpha := \ker(f(e_\alpha))$ von V . N_α ist invariant unter $f(H)$ und besitzt daher eine Basis aus Gewichtsvektoren $u^{(a)}$ zu den Gewichten $\mu_a, a = 1, \dots, m$.

• Für jedes $u^{(a)}$ definieren wir

$$u_k^{(a)} := f(e_{-\alpha})^k u^{(a)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad V_a := \text{span}\{u_k^{(a)} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Sei r_a der größte Index, für den $u_{r_a}^{(a)} \neq 0$ gilt. V_a ist nach Konstruktion irreduzibel und die Vektoren $u_k^{(a)}, k = 1, \dots, r_a$, bilden eine Basis, da sie zu verschiedenen Gewichtsunterräumen der Darstellung (V, f) von \mathcal{L} gehören.

Wir prüfen, daß die Wirkung von $f(\mathcal{L}_{(\alpha)})$ auf die Vektoren $u_k^{(a)}$ durch die im Lemma aufgelisteten Formeln gegeben ist: Bei $f(e_{-\alpha})$ und $f(h_\alpha)$ ist das klar. Im Fall von $f(e_\alpha)$ berechnen wir unter Verwendung der Abkürzungen $\hat{E} := f(e_\alpha), \hat{F} := f(e_{-\alpha}), \hat{H} := f(h_\alpha)$

$$\hat{E}u_k^{(a)} = \hat{E}\hat{F}^k u_0^{(a)} = \hat{F}\hat{E}\hat{F}^{k-1} u_0^{(a)} + [\hat{E}, \hat{F}]\hat{F}^{k-1} u_0^{(a)}.$$

Der zweite Term ergibt $\hat{H}u_{k-1}^{(a)} = (\mu - (k-1)\alpha, \alpha) u_{k-1}^{(a)}$, der erste wird weiter umgeformt zu

$$\hat{F}^2 \hat{E}\hat{F}^{k-2} u_0^{(a)} + \hat{F}\hat{H}\hat{F}^{k-2} u_0^{(a)} = \hat{F}^2 \hat{E}\hat{F}^{k-2} u_0^{(a)} + (\mu - (k-2)\alpha, \alpha) u_{k-1}^{(a)}.$$

Dies setzen wir solange fort, bis \hat{E} nach rechts durchgetauscht ist und $u_0^{(a)}$ vernichtet. Übrig bleibt die Summe $\sum_{j=1}^k (\mu - (k-j)\alpha, \alpha) u_{k-1}$, die, wenn man sie ausführt, die Behauptung liefert.

- $V \supseteq \bigoplus_{a=1}^m V_a$: (induktiv) Wir bezeichnen $V_{(a)} := V_1 \oplus \dots \oplus V_a$. Der Induktionsanfang ist gesichert. Sei deshalb $V_{(a)} \subseteq V$. Es gilt $V_{(a)} \cap N_\alpha = \text{span}_{\mathbb{C}}\{u^{(1)}, \dots, u^{(a)}\}$ und folglich $u^{(a+1)} \notin V_{(a)}$. Damit ist $V_{a+1} \cap V_{(a)}$ ein echter, unter $f(\mathcal{L}_{(\alpha)})$ invarianter Unterraum von V_{a+1} , also $V_{a+1} \cap V_{(a)} = \{0\}$. Es folgt $V_{(a+1)} = V_{a+1} \oplus V_{(a)} \subseteq V$.

- $V \subseteq \bigoplus_{a=1}^m V_a$: Jeder beliebige Vektor $u \in V$ erzeugt einen irreduziblen Unterraum U , der wegen (2.8) einen Vektor $\tilde{u} \neq 0$ aus N_α enthält. Damit ist $U \cap \bigoplus_{a=1}^m V_a \neq \{0\}$, also $U \subseteq \bigoplus_{a=1}^m V_a$. ■

Lemma 2.5 Sei $u \in V_\mu \cap \ker(f(e_\alpha))$, $u \neq 0$. Wir setzen $u_k := f(e_{-\alpha})^k u$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Für $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_r \neq 0 \text{ und } u_{r+1} = 0 \quad \iff \quad r = \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Die von u erzeugte irreduzible Komponente der induzierten Darstellung $(V, f|_{\mathcal{L}_{(\alpha)}})$ hat dann die Dimension $r + 1$.

BEWEIS: Bezeichne U den von u erzeugten irreduziblen Unterraum.

(\Rightarrow): Nach Lemma 2.4 bilden die Vektoren u_k , $k = 1, \dots, r$ eine Basis in U und sind Gewichtsvektoren zu den Gewichten $\mu - k\alpha$ der Darstellung (V, f) . Daher gilt

$$0 = \text{tr}_U[f(e_\alpha), f(e_{-\alpha})] = \text{tr}_U f(h_\alpha) = \sum_{k=0}^r (\mu - k\alpha, \alpha) = (r+1)(\mu, \alpha) - \frac{1}{2}r(r+1)(\alpha, \alpha).$$

(\Leftarrow): Mit Hilfe des Lemmas 2.4 berechnen wir $f(e_\alpha)u_k$, ersetzen $(\mu, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)r$ und erhalten $f(e_\alpha)u_k = \frac{1}{2}k(r - (k-1))(\alpha, \alpha)$. Daraus lesen wir ab:

1. Aus $u \neq 0$ folgt sukzessive $u_k \neq 0$ für $k = 1, \dots, r$.
2. $f(e_\alpha)u_{r+1} = 0$. Wäre $u_{r+1} \neq 0$, dann erzeugte es einen invarianten Unterraum \tilde{U} , der wegen $u_k \notin \tilde{U}$, $k \leq r$, in U echt enthalten wäre (Widerspruch). ■

Wurzelfolgen

Sei $\alpha \in \Sigma$, $\mu \in \Gamma(f)$, $u \in V_\mu$. Der Vektor u erzeugt einen irreduziblen Unterraum der induzierten Darstellung $(V, f|_{\mathcal{L}_{(\alpha)}})$ der Unter algebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$. Nach Lemma 2.4 gibt es in diesem Unterraum eine Basis aus Gewichtsvektoren $\{u_{\mu+k\alpha} : k = -r, \dots, q\}$ der Darstellung (V, f) von \mathcal{L} . Die Folge $\{\mu + k\alpha : k = -r, \dots, q\}$ der zugehörigen Gewichte nennen wir (von u erzeugte) α -Folge durch μ (engl.: α -string through μ). Die charakteristischen Zahlen r und q kennzeichnen wir bei Bedarf mit einem Index: $r_{\mu, \alpha}$ bzw. $q_{\mu, \alpha}$.

Durch ein Gewicht μ werden im allgemeinen mehrere verschiedene α -Folgen gehen; je nach Wahl von $u \in V_\mu$ können $r_{\mu, \alpha}$ und $q_{\mu, \alpha}$ verschiedene Werte annehmen. Ihre Differenz allerdings ist durch μ und α allein bestimmt:

Satz 2.6 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unter algebra mit Wurzelsystem Σ und (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Sei $\alpha \in \Sigma$ und $\mu \in \Gamma(f)$. Für jede α -Folge durch μ gilt

$$r_{\mu, \alpha} - q_{\mu, \alpha} = \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Inbesondere ist $\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ für alle Gewichte μ und alle Wurzeln α ganzzahlig.

BEWEIS: Sei $u \in V_\mu$ ein Vektor, der die α -Folge durch μ erzeugt. Dann ist der Vektor $f(e_\alpha)^{q_{\mu,\alpha}} u$ in $V_{\mu+q_{\mu,\alpha}\alpha}$ enthalten, verschieden von 0 und wird durch $f(e_\alpha)$ vernichtet. Wir können also Lemma 2.5 anwenden und erhalten $r = q_{\mu,\alpha} + r_{\mu,\alpha} = \frac{2(\mu + q_{\mu,\alpha}\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$. Daraus folgt die Behauptung. ■

2.4 Eigenschaften von Wurzelsystemen, Teil II

Das, was wir im vorangegangenen Abschnitt über Wurzelfolgen gelernt haben, wollen wir jetzt benutzen, um weitere Einsichten in die Struktur des Wurzelsystems zu gewinnen. Die einzige Stelle, an der wir dabei aufpassen müssen, ist die α -Folge durch $\pm\alpha$ selbst (α eine Wurzel), denn diese verläuft durch die 0, welche zwar zum Gewichtssystem der adjungierten Darstellung, nicht aber zum Wurzelsystem gehört. Da wir jedoch aus Punkt (8) wissen, wie die betreffende Folge aussieht, ist das nicht weiter wichtig. Wenn wir also im folgenden α -Folgen durch eine Wurzel β betrachten, setzen wir immer $\alpha \neq \pm\beta$ voraus.

(9) Sei $\{e_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ ein System normierter Wurzelvektoren. Dann gilt

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, y_\beta]] = \frac{1}{2} q_{\beta,\alpha} (r_{\beta,\alpha} + 1) (\alpha, \alpha) y_\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma, y_\beta \in \mathcal{L}_\beta.$$

Insbesondere ist $[e_\alpha, e_\beta] \neq 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma; \alpha + \beta \in \Sigma$.

Die Formel ist auch für $\beta = \alpha$ bzw. $\beta = -\alpha$ richtig; dann ist nämlich

$$q_{\alpha,\alpha} = 0, \quad r_{\alpha,\alpha} = 2 \quad \text{bzw.} \quad q_{-\alpha,-\alpha} = 2, \quad r_{-\alpha,-\alpha} = 0.$$

Zum Beweis lassen wir die Indizes an r und q weg. Der von y_β erzeugte irreduzible Unterraum der Darstellung $\text{ad}_{\mathcal{L}}|_{\mathcal{L}_{(\alpha)}}$ ist $V := \bigoplus_{j=-r}^q \mathcal{L}_{\beta+j\alpha}$. Wir wählen eine Basis $\{x_k : k = 0, \dots, r+q\}$ in V , die den Relationen in Lemma 2.4 genügt und die zusätzlich $x_q = y_\beta$ erfüllt. Die Behauptung ergibt sich dann aus den Formeln im Lemma und Satz 2.6. ■

(10) Beliebige α -Folgen durch Wurzeln $\beta \in \Sigma$ bestehen aus höchstens 4 Gliedern. Damit kann $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ nur die Werte $0, \pm 1, \pm 2$ oder ± 3 annehmen.

(Dies gilt natürlich auch im Falle $\beta = \alpha$.)

Nehmen wir an, es gäbe eine α -Folge durch β mit mehr als 4 Gliedern. Wir könnten α bzw. β dann so umbenennen, daß die Folge ein symmetrisches Teilstück

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

enthielte. Betrachten wir die β -Folge durch $\beta - 2\alpha$: diese ist weder nach oben noch nach unten fortsetzbar, denn weder $(\beta - 2\alpha) + \beta = 2(\beta - \alpha)$ noch $(\beta - 2\alpha) - \beta = -2\alpha$ ist eine Wurzel (Eigenschaft (8)). Damit ist $\frac{2(\beta - 2\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0$ (i). Für die β -Folge durch

$\beta + 2\alpha$ erhalten wir auf analoge Weise $\frac{2(\beta + 2\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0$ (ii). Addition von (i) und (ii)

ergibt einen Widerspruch. Es muß also $r_{\beta,\alpha} + q_{\beta,\alpha} + 1 \leq 4$ bzw. $r_{\beta,\alpha} + q_{\beta,\alpha} \leq 3$ sein. Der zweite Teil der Behauptung folgt dann aus Satz 2.6. ■

Satz 2.7 Wir bilden den \mathbf{Q} -Vektorraum⁵ $H_0^* := \text{span}_{\mathbf{Q}}\Sigma$. Es gilt:

(a) $\Gamma(f) \subseteq H_0^*$ für alle Darstellungen (V, f) von \mathcal{L}

(b) $\dim(H_0^*) = \dim(H)$

(c) Die Einschränkung der Killing-Form auf H_0^* ist ein Skalarprodukt. Insbesondere sind die Zahlen (μ, ν) für Gewichte μ, ν beliebiger Darstellungen rational.

BEWEIS: Wir wählen in H^* eine Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ aus Wurzeln.

zu (a): Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} und $\mu \in \Gamma(f)$. Die Entwicklungskoeffizienten μ^i von μ nach der Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ berechnen sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$(\mu, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i (\alpha_i, \alpha_j).$$

Wenn wir jeweils die j -te Gleichung durch $\frac{1}{2}(\alpha_j, \alpha_j)$ teilen, erhalten wir ein äquivalentes System:

$$\frac{2(\mu, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} \mu^i \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

Da dieses nach Satz 2.6 ganzzahlige Koeffizienten hat, sind seine Lösungen rational. Es folgt $\mu \in \text{span}_{\mathbf{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subseteq H_0^*$.

zu (b): Aussage (a) gilt insbesondere für die adjungierte Darstellung, d. h. wir haben $\Sigma \subseteq \text{span}_{\mathbf{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ und folglich $H_0^* = \text{span}_{\mathbf{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Die Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sind linear unabhängig über dem Körper \mathbb{C} , also erst recht über $\mathbf{Q} \subseteq \mathbb{C}$ und bilden damit eine Basis in H_0^* .

zu (c): Es genügt zu zeigen, daß die Zahlen (α, β) für beliebige $\alpha, \beta \in \Sigma$ rational sind, denn dann nimmt die Einschränkung der Killing-Form auf H_0^* Werte in \mathbf{Q} und aus Gleichung (2.5) folgt unmittelbar, daß sie positiv definit ist. Seien also $\alpha, \beta \in \Sigma$ gegeben. Wir schreiben $(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}(\beta, \beta)$. Nach Satz 2.6 ist der erste Faktor ganzzahlig. Aus dem Satz folgt ebenso, daß der zweite Faktor rational ist: Mit Gleichung (2.5) gilt nämlich

$$(\beta, \beta) = \sum_{\gamma \in \Sigma} (\gamma, \beta)^2 = \frac{(\beta, \beta)^2}{4} \sum_{\gamma \in \Sigma} \left(\frac{2(\gamma, \beta)}{(\beta, \beta)} \right)^2,$$

also $(\beta, \beta) = 4 \left(\sum_{\gamma \in \Sigma} (r_{\gamma, \beta} - q_{\gamma, \beta})^2 \right)^{-1}$. ■

Folgerung 2.8 Der reelle Vektorraum $H_{\mathbb{R}}^* := \text{span}_{\mathbb{R}}\Sigma$ ist ein Euklidischer Raum. Er enthält die Gewichte beliebiger Darstellungen von \mathcal{L} .

Beispiel: $sl(n+1, \mathbb{C})$

Als Cartan-Unteralgebra H wählen wir die spurfreien Diagonalmatrizen, denn diese bilden offenbar eine maximale kommutative Unteralgebra. Damit ist $\text{rg}(sl(n+1, \mathbb{C})) = n$.

• Für ein beliebiges $h \in H$ gilt $[h, E_{(jk)}] = (h_{jj} - h_{kk})E_{(jk)}$, $j, k = 1, \dots, n+1$. Die Matrizen $\{E_{(jk)} : j, k = 1, \dots, n+1; j \neq k\}$ sind also Wurzelvektoren zu den Wurzeln

$$\alpha_{(jk)}(h) = h_{jj} - h_{kk}, \quad j, k = 1, \dots, n+1; j \neq k. \quad (2.10)$$

Durch Abzählen und Vergleich mit $\text{card}(\Sigma) = \dim(\mathcal{L}) - \dim(H)$ stellen wir fest, daß es keine weiteren gibt. Die von H induzierte Wurzelraum-Zerlegung ist demnach

$$sl(n+1, \mathbb{C}) = H \bigoplus_{\substack{i,j=1,\dots,n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{(ij)}.$$

⁵ \mathbf{Q} = Körper der rationalen Zahlen

Wie wir sehen, gilt $\alpha_{(ij)} = -\alpha_{(ji)}$ und damit $\Sigma = -\Sigma$. Die einzigen Vielfachen von $\alpha_{(jk)}$ sind wirklich nur $\pm\alpha_{(jk)}$. Weiterhin bestehen Wurzelfolgen hier aus höchstens zwei Gliedern, denn aus $\alpha_{ij} + \alpha_{kl} \in \Sigma$ folgt $j = k$.

• Als nächstes wollen wir den von der Killing-Form induzierten Isomorphismus zwischen H und H^* bestimmen. Dem Lemma 1.13 entnehmen wir

$$(h, h') = 2(n+1) \operatorname{tr}(h h') = 2(n+1) \sum_{j=1}^{n+1} h_{jj} h'_{jj}. \quad (2.11)$$

Für die Elemente $h_{\alpha_{(ij)}}$ ergibt sich daraus

$$h_{\alpha_{(ij)}} = \frac{1}{2(n+1)} (E_{(ii)} - E_{(jj)}) \quad (2.12)$$

und für die Killing-Form auf H^*

$$(\alpha_{(ij)}, \alpha_{(kl)}) = \frac{1}{2(n+1)} (\delta_{ik} - \delta_{jk} - \delta_{il} + \delta_{jl}). \quad (2.13)$$

• Zur Bestimmung der Werte der Killing-Form auf den Wurzelvektoren $E_{(ij)}$ verwenden wir die Eigenschaft (6): wir berechnen $[E_{(ij)}, E_{(ji)}] = E_{(ii)} - E_{(jj)} = 2(n+1)h_{\alpha_{(ij)}}$ und lesen

$$(E_{(ij)}, E_{(ji)}) = 2(n+1)$$

ab. Alle anderen Produkte von Wurzelvektoren verschwinden nach Eigenschaft (2). Als normierte Wurzelvektoren könnten wir also z. B. $e_{\alpha_{(ij)}} = (2(n+1))^{-1/2} E_{(ij)}$ nehmen.

Man vergleiche die hier durchgeführte Argumentation noch einmal mit der für $sl(2, \mathbb{C})$ und $sl(3, \mathbb{C})$ im Abschnitt 1.4.

Analoge Untersuchungen für die Lie-Algebren $so(n, \mathbb{C})$ und $sp(n, \mathbb{C})$ führen wir im Beweis zum Satz 3.6 durch.

2.5 Systeme einfacher Wurzeln

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ .

Lexikografische Ordnung auf H_0^*

Sei $\{\varrho_1, \dots, \varrho_\ell\}$ eine geordnete Basis in H_0^* . Für ein Element $\mu \in H_0^*$ setzen wir $\mu \geq 0$, falls sein erster von Null verschiedener Koeffizient in dieser Basis positiv ist oder wenn $\mu = 0$ gilt. Für $\mu, \nu \in H_0^*$ sei $\mu \geq \nu$, falls $\mu - \nu \geq 0$. Die so erzeugte Ordnung heißt *lexikografisch* bezüglich der Basis $\{\varrho_1, \dots, \varrho_\ell\}$. Sie macht H_0^* zu einem linear geordneten Vektorraum, d. h. es gilt:

1. Je zwei Elemente von H_0^* sind vergleichbar.
2. Aus $\mu \geq \nu$ und $\mu' \geq \nu'$ folgt $\mu + \mu' \geq \nu + \nu'$.
3. Aus $\mu \geq \nu$ und $\lambda \geq 0$ folgt $\lambda\mu \geq \lambda\nu$.

Die Menge der positiven Wurzeln kennzeichnen wir mit Σ^+ , die der negativen mit Σ^- .

Einfache Wurzeln

Sei eine lexikografische Ordnung auf H_0^* fixiert. Eine Wurzel $\alpha \in \Sigma$ heißt *einfach* bezüglich dieser Ordnung, falls sie positiv ist, aber nicht als Summe positiver Wurzeln geschrieben werden kann. Das System der einfachen Wurzeln bezeichnen wir mit π .

Systeme einfacher Wurzeln ("SEW") spielen eine wesentliche Rolle z. B. bei der Klassifizierung und in der Darstellungstheorie der komplexen halbeinfachen Lie-Algebren.

Satz 2.9 (Eigenschaften von SEW) *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra und Σ das zugehörige Wurzelsystem. Sei auf H_0^* eine lexikografische Ordnung fixiert und sei π das zugehörige System einfacher Wurzeln. Es gilt:*

(a) $\alpha - \beta \notin \Sigma \quad \forall \alpha, \beta \in \pi$

(b) $(\alpha, \beta) \leq 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \pi; \alpha \neq \beta$

(c) π ist eine Basis in H_0^* . Die Entwicklungskoeffizienten beliebiger Wurzeln β sind entweder ausschließlich positive oder ausschließlich negative ganze Zahlen.

(d) Zu jedem $\beta \in \Sigma^+ \setminus \pi$ gibt es ein $\alpha \in \pi$, so daß $\beta - \alpha \in \Sigma^+$. Insbesondere gilt: Bei der Zerlegung von β in eine Summe einfacher Wurzeln gibt es eine Reihenfolge der Summanden, so daß jede Partialsumme eine Wurzel ist.

BEWEIS:

zu (a): (indirekt) Sei $\alpha, \beta \in \pi$. Wäre $\alpha - \beta \in \Sigma$, z. B. $\alpha - \beta \in \Sigma^+$, dann könnte man α als Summe positiver Wurzeln schreiben: $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ (Widerspruch).

zu (b): Sei wieder $\alpha, \beta \in \pi$. Nach (a) ist die β -Folge durch α nicht nach unten fortsetzbar, d. h. $r_{\alpha, \beta} = 0$. Nach Satz 2.6 gilt daher $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -q_{\beta, \alpha} \leq 0$.

zu (c): Wir prüfen zuerst die lineare Unabhängigkeit:

Lemma 2.10 *Ein System $\{\varrho_1, \dots, \varrho_k\}$ von Elementen eines geordneten Euklidischen Raumes, das die Bedingungen (i) $\varrho_i > 0 \quad \forall i$ und (ii) $(\varrho_i, \varrho_j) \leq 0 \quad \forall i \neq j$ erfüllt, ist linear unabhängig.*

BEWEIS: Wir bestimmen die Lösungen λ_i der Gleichung $\sum_i \lambda^i \varrho_i = 0$. Dazu teilen wir die Summe in einen positiven und einen negativen Teil:

$$\lambda_+^i := \begin{cases} \lambda^i & | \quad \lambda^i \geq 0 \\ 0 & | \quad \text{sonst} \end{cases}, \quad \lambda_-^i := \begin{cases} -\lambda^i & | \quad \lambda^i \leq 0 \\ 0 & | \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt $\sum_i \lambda_+^i \varrho_i = \sum_i \lambda_-^i \varrho_i \geq 0$. Wir berechnen

$$0 \leq (\sum_i \lambda_+^i \varrho_i, \sum_j \lambda_+^j \varrho_j) = (\sum_i \lambda_+^i \varrho_i, \sum_j \lambda_-^j \varrho_j) = \sum_{i \neq j} \lambda_+^i \lambda_-^j (\varrho_i, \varrho_j) \leq 0,$$

d. h. $\sum_i \lambda_+^i \varrho_i = 0$. Es folgt $\lambda_+^i = 0$ und damit $\lambda^i = 0 \quad \forall i$.

Fahren wir nun im Beweis von Punkt (c) des Satzes fort. Sei $\beta \in \Sigma^+$ beliebig. β ist entweder einfach oder Summe zweier positiver Wurzeln. Von diesen ist jede wieder entweder einfach oder Summe usw. Nach endlich vielen Schritten haben wir β in eine Summe einfacher Wurzeln zerlegt. Durch Zusammenfassen gleicher Summanden erhalten wir die Koeffizienten, die folglich positiv ganzzahlig sind. Im Falle $\beta \in \Sigma^-$ finden wir analog negativ ganzzahlige Koeffizienten. Daraus folgt dann auch, daß H_0^* durch π aufgespannt wird.

zu (d): (indirekt) Sei $\beta \in \Sigma^+ \setminus \pi$. Gäbe es kein α in π mit $\beta - \alpha \in \Sigma^+$, dann wäre $r_{\beta, \alpha} = 0$ für beliebige $\alpha \in \pi$ und aus Satz 2.6 folgte $(\beta, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)(-q_{\beta, \alpha}) \leq 0 \quad \forall \alpha \in \pi$. Lemma 2.10 besagt, daß dann $\pi \cup \{\beta\}$ linear unabhängig wäre (Widerspruch zu (c)). ■

Sei π eine aus Wurzeln bestehende Basis in H_0^* , in der alle Wurzeln entweder nur negative oder nur positive ganzzahlige Koeffizienten haben. Jede Anordnung von π erzeugt eine lexikografische Ordnung auf H_0^* , deren SEW offensichtlich gerade π selbst ist. Wir werden daher im folgenden die SEW als primäre Objekte betrachten und vereinbaren, daß H_0^* automatisch die induzierte lexikografische Ordnung trägt.

Die Höhe einer Wurzel

Sei $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein SEW in Σ . Die *Höhe* (engl. *level* oder *height*) einer Wurzel $\beta = \sum_{i=1}^\ell n^i \alpha_i$ (in Bezug auf π) ist die ganze Zahl

$$h(\beta) := \sum_{i=1}^\ell n^i. \quad (2.14)$$

Sie ist positiv oder negativ, je nachdem, ob β in Σ^+ oder in Σ^- liegt. Diese Funktion erzeugt eine natürliche Graduierung von \mathcal{L} :

Satz 2.11 (Kanonische Graduierung und Filtration) *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW in Σ . Wir bilden die Unterräume*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &:= H & \mathcal{L}_k &:= \bigoplus_{\substack{\beta \in \Sigma \\ h(\beta)=k}} \mathcal{L}_\beta & k \in \mathbf{Z}, k \neq 0 \\ \mathcal{L}_{(0)} &:= H & \mathcal{L}_{(n)} &:= H \bigoplus_{\substack{\beta \in \Sigma \\ |h(\beta)| \leq n}} \mathcal{L}_\beta & n \in \mathbf{N}, n \neq 0. \end{aligned}$$

Die Folge $\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ von Unterräumen ist eine Graduierung und die Folge $\{\mathcal{L}_{(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Filtration von \mathcal{L} .

BEWEIS: Es genügt zu prüfen, daß $\{\mathcal{L}_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ eine Graduierung ist, denn dann ist $\{\mathcal{L}_{(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ die in natürlicher Weise assoziierte Filtration. Offensichtlich ist $\mathcal{L} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}_k$. Zu zeigen bleibt also $[\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_l] \subseteq \mathcal{L}_{k+l}$, d. h. $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subseteq \mathcal{L}_{h(\alpha)+h(\beta)} \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma$. Wir haben zumindest $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subseteq \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$. Es gilt aber auch $\mathcal{L}_{\alpha+\beta} \subseteq \mathcal{L}_{h(\alpha)+h(\beta)}$: Im Falle $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta \notin \Sigma$ ist das trivialerweise erfüllt; im Falle $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta \in \Sigma$ gilt $h(\alpha + \beta) = h(\alpha) + h(\beta)$ und im Falle $\alpha + \beta = 0$ ist $h(\alpha) + h(\beta) = 0$ und $\mathcal{L}_{\alpha+\beta} = H = \mathcal{L}_0$. ■

Die Cartan-Matrix

Sei $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein SEW in Σ . Die Matrix

$$A_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad i, j = 1, \dots, \ell \quad (2.15)$$

heißt *Cartan-Matrix* von π . Nach Definition ist $A_{ii} = 2$. Die anderen Einträge sind ebenfalls starken Einschränkungen unterworfen: Es gilt nämlich für alle $i \neq j$

$$A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}, \quad A_{ij}A_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (2.16)$$

BEWEIS: Nach Eigenschaft (10) in Abschnitt 2.4 ist $|A_{ij}| \leq 3$, nach Satz 2.9 (b) ist $A_{ij} \leq 0$. Da α_i und α_j linear unabhängig sind, gilt außerdem $A_{ij}A_{ji} = \frac{4(\alpha_i, \alpha_j)^2}{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)} < 4$. ■

Die Cartan-Matrix enthält alle Informationen über \mathcal{L} :

Satz 2.12 (Rekonstruktionssatz) *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW. Sei zu jeder einfachen Wurzel $\alpha_i \in \pi$, $i = 1, \dots, n$, ein Paar $e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}$ von normierten Wurzelvektoren gewählt. Wir setzen*

$$h_i := \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} h_{\alpha_i}, \quad e_i := e_{\alpha_i}, \quad f_i := \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} e_{-\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es gilt:

(a) Σ läßt sich aus π rekonstruieren.

(b) Die $3n$ Elemente h_i, e_i und f_i erzeugen \mathcal{L} . Sie genügen den Kommutatorrelationen

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = A_{ji} e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ji} f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i.$$

BEWEIS:

zu (a): Wir konstruieren aus π eine Menge $\tilde{\Sigma}^+ \subseteq H_0^*$ in der Gestalt $\tilde{\Sigma}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{\Sigma}_i^+$, wobei die Mengen $\tilde{\Sigma}_i^+$ rekursiv gebildet werden: Wir beginnen mit $\tilde{\Sigma}_1^+ := \pi$ und setzen

$$\tilde{\Sigma}_{i+1}^+ := \{\beta + \alpha : \beta \in \tilde{\Sigma}_i^+; \alpha \in \pi; \tilde{q}_{\beta, \alpha} \neq 0\},$$

wobei $\tilde{q}_{\beta, \alpha} := -\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} + \tilde{r}_{\beta, \alpha}$ und $\tilde{r}_{\beta, \alpha} := \max\{k : \beta - k\alpha \in \bigcup_{j=1}^i \tilde{\Sigma}_j^+\}$. Zum Schluß vergleichen wir $\tilde{\Sigma}^+$ mit Σ^+ : Aus Satz 2.6 folgt $\tilde{\Sigma}^+ \subseteq \Sigma^+$ und aus Satz 2.9 (d) die umgekehrte Inklusion.

zu (b): Sei $\beta \in \Sigma^+$. Nach Satz 2.9 (d) können wir schreiben $\beta = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_m}$, wobei von rechts beginnend jede Teilsumme eine Wurzel ist. Mit Eigenschaft (9) in Abschnitt 2.4 gilt dann $\mathcal{L}_\beta = \mathbb{C} \operatorname{ad}(e_{i_1}) \dots \operatorname{ad}(e_{i_{m-1}}) e_{i_m}$ und $\mathcal{L}_{-\beta} = \mathbb{C} \operatorname{ad}(f_{i_1}) \dots \operatorname{ad}(f_{i_{m-1}}) f_{i_m}$. ■

Weyl-Chevalley-Basen

Sei $\{e_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ ein System normierter Wurzelvektoren in \mathcal{L} . Betrachten wir die Strukturkonstanten $N_{\alpha, \beta}$ in der Gleichung $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}$. Sie erfüllen natürlich $N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha}$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} &= N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} (e_{\alpha+\beta}, e_{-\alpha-\beta}) = ([e_\alpha, e_\beta], [e_{-\alpha}, e_{-\beta}]) \\ &= -([e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]], e_{-\beta}) \end{aligned}$$

und aus der Eigenschaft (9) in Abschnitt 2.4 folgt

$$-N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = \frac{1}{2} q_{\beta, \alpha} (r_{\beta, \alpha} + 1) (\alpha, \alpha).$$

Fordern wir

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}, \quad (2.17)$$

so gilt für alle $\alpha, \beta \in \Sigma$

$$N_{\alpha, \beta} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} q_{\beta, \alpha} (r_{\beta, \alpha} + 1) (\alpha, \alpha)}. \quad (2.18)$$

Insbesondere sind die Strukturkonstanten durch (2.17) bis auf einen Vorzeichenfaktor festgelegt. Eine Basis in \mathcal{L} , bestehend aus den Cartan-Elementen h_α eines SEW π und normierten Wurzelvektoren e_α , $\alpha \in \Sigma$, deren Strukturkonstanten (2.17) erfüllen, heißt *Weyl-Chevalley-Basis*. Weyl-Chevalley-Basen kann man folgendermaßen konstruieren: Man fixiert ein SEW π in Σ und wählt Paare von normierten Wurzelvektoren e_α , $e_{-\alpha}$, $\alpha \in \pi$. Dann berechnet man sukzessive e_β für $\beta \in \Sigma^+$, $h(\beta) = 2, 3, \dots$, unter Verwendung von (2.18). (Die Wurzelvektoren $e_{-\beta}$, $\beta \in \Sigma^+$, sind dadurch automatisch festgelegt.)

Beispiel: $sl(n+1, \mathbb{C})$

(Notation wie im Beispiel zum Abschnitt 2.4) Wir wollen eine geordnete Basis in H_0^* fixieren. Um das Problem zu umgehen, für ein gewisses Funktional $\varrho \in H^*$ herausfinden zu müssen, ob es auch zu H_0^* gehört, wählen wir eine Basis aus Wurzeln:

$$\alpha_i := \alpha_{(i \ i+1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wurzeln $\alpha_{(ij)}$ mit $i < j$ können zerlegt werden in $\alpha_{(ij)} = \alpha_{(i \ i+1)} + \alpha_{(i+1 \ i+2)} + \dots + \alpha_{(j-1 \ j)}$, d. h. sie sind bezüglich der von $\{\alpha_i : i = 1, \dots, n\}$ induzierten lexikografischen Ordnung positiv. Für den Fall $i < j - 1$ lassen sie sich als Summe positiver Wurzeln schreiben, für den Fall $i = j - 1$ nicht. Die einfachen Wurzeln sind also gerade die Basiselemente α_i , $i = 1, \dots, n$ selbst. Der positive Teil des Wurzelsystems hat damit die Gestalt

$$\Sigma^+ = \{\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{l-1} + \alpha_l : 1 \leq k \leq l \leq n\}. \quad (2.19)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.13) im Beispiel zum Abschnitt 2.4 berechnen wir die Cartan-Matrix:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Analoge Untersuchungen für $so(n, \mathbb{C})$ und $sp(n, \mathbb{C})$ findet man im Beweis zum Satz 3.6.)

2.6 Die Weyl-Gruppe

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ .

Weyl-Ebenen und Weyl-Kammern

Für ein Funktional $\varrho \in H^*$ bezeichne P_ϱ^* die Hyperebene in H^* orthogonal zu ϱ . Entsprechend sei P_ϱ die Hyperebene in H orthogonal zu h_ϱ . Es gilt

$$H \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Sigma} P_\alpha \right) = \{h \in H : Z_{\mathcal{L}}(h) = H\}. \quad (2.20)$$

BEWEIS: Für $\alpha \in \Sigma$, $h \in P_\alpha$ gilt $[h, e_\alpha] = (h, h_\alpha)e_\alpha = 0$, d. h. die Elemente von P_α , $\alpha \in \Sigma$, sind nichtregulär. Sei andererseits h ein nichtreguläres Element. Dann gibt es

ein $x \in \mathcal{L} \setminus H$, $x \neq 0$, mit $[h, x] = 0$. Wir zerlegen $x = x_H + \sum_{\alpha \in \Sigma} \xi^\alpha e_\alpha$, berechnen $[h, x] = \sum_{\alpha \in \Sigma} (h, h_\alpha) \xi^\alpha e_\alpha$ und schließen $h \in P_\alpha$ für alle $\alpha \in \Sigma$ mit $\xi^\alpha \neq 0$. ■

Die Hyperebenen P_α^* orthogonal zu Wurzeln $\alpha \in \Sigma$ heißen *Weyl-Ebenen*. Auf analoge Weise definieren wir Weyl-Ebenen in $H_{\mathbb{R}}^*$, die wir ebenfalls mit P_α^* bezeichnen. Wir setzen

$$\tilde{H}_{\mathbb{R}}^* := H_{\mathbb{R}}^* \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \Sigma} P_\alpha^* \right).$$

Die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$ heißen *Weyl-Kammern*.

Die Weyl-Gruppe $\text{Ad}(\Sigma)$

Für ein Funktional $\varrho \in H^*$ bezeichne σ_ϱ die Spiegelung von H^* an der Hyperebene P_ϱ , d. h. die Transformation

$$\sigma_\varrho : H^* \rightarrow H^*, \quad \varrho' \mapsto \varrho' - \frac{2(\varrho', \varrho)}{(\varrho, \varrho)} \varrho.$$

Spiegelungen sind isometrisch, d. h. Elemente von $O(H^*)$. Desweiteren gilt

$$\sigma_{T\varrho} = T\sigma_\varrho T^{-1} \quad \forall \varrho \in H^*, T \in O(H^*). \quad (2.21)$$

Die von den Spiegelungen σ_α an Weyl-Ebenen P_α , $\alpha \in \Sigma$, erzeugte Untergruppe von $O(H^*)$ heißt *Weyl-Gruppe* $\text{Ad}(\Sigma)$.

Die Weyl-Gruppe ist eine Symmetriegruppe beliebiger Gewichtssysteme:

Satz 2.13 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Es gilt:*

- (a) *Das Gewichtssystem $\Gamma(f)$ ist invariant unter $\text{Ad}(\Sigma)$.*
- (b) *$m(\sigma\mu) = m(\mu) \quad \forall \mu \in \Gamma(f), \sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$.*

Zum Beweis benötigen wir das folgende

Lemma 2.14 *(Voraussetzungen wie im Satz)*

Sei $\alpha \in \Sigma$. Die α -Folgen durch beliebige $\mu \in \Gamma(f)$ sind invariant unter der Spiegelung σ_α .

BEWEIS: Sei $\mu \in \Gamma(f)$, $\alpha \in \Sigma$ und sei $\mathcal{F} = \{\mu - r\alpha, \dots, \mu + q\alpha\}$ eine α -Folge durch μ .

Nach Satz 2.6 gilt $\sigma_\alpha \mu = \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \mu + (q - r)\alpha$. Das Funktional $\mu + (q - r)\alpha$ ist wegen $-r \leq (q - r) \leq q$ in der Folge \mathcal{F} enthalten.

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes: Es genügt, Invarianz unter Spiegelungen zu zeigen. Sei dazu $\mu \in \Gamma(f)$, $\alpha \in \Sigma$. Wir wählen eine Basis $v_\mu^1, \dots, v_\mu^{m(\mu)}$ in V_μ . Jeder Basisvektor v_μ^i erzeugt einen irreduziblen Unterraum $V_{\mu, \alpha}^i$ der Darstellung $f|_{\mathcal{L}(\alpha)}$ von $\mathcal{L}(\alpha)$ und damit eine α -Folge durch μ . Für ein Funktional $\nu \in H^*$ gilt

$$\dim \left(V_\nu \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{m(\mu)} V_{\mu, \alpha}^i \right) \right) = \text{Anzahl der } \alpha\text{-Folgen durch } \mu, \text{ die } \nu \text{ enthalten.} \quad (*)$$

Betrachten wir den Fall $\nu = \sigma_\alpha \mu$. Das Lemma besagt, daß die Anzahl der α -Folgen durch μ , die $\sigma_\alpha \mu$ enthalten, gleich $m(\mu)$ ist. Aus (*) folgt daher $m(\sigma_\alpha \mu) = \dim(V_{\sigma_\alpha \mu}) \geq m(\mu)$. Insbesondere ist $\sigma_\alpha \mu \in \Gamma(f)$. Wegen $\mu = \sigma_\alpha(\sigma_\alpha \mu)$ schließen wir analog $m(\mu) \geq m(\sigma_\alpha \mu)$, also Gleichheit. ■

Folgerung 2.15

- (a) Das Wurzelsystem Σ ist invariant unter $\text{Ad}(\Sigma)$.
 (b) $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$ ist invariant unter $\text{Ad}(\Sigma)$. Insbesondere permutiert $\text{Ad}(\Sigma)$ die Weyl-Kammern.

Die Elemente der Weyl-Gruppe kann man sich als von inneren Automorphismen von \mathcal{L} induziert vorstellen:

Satz 2.16 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ . Dann gibt es zu jedem $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$ einen inneren Automorphismus U von \mathcal{L} mit $U^*|_{H^*} = \sigma$. Ist umgekehrt U ein innerer Automorphismus von \mathcal{L} , der H invariant läßt, dann gilt $U^*|_{H^*} \in \text{Ad}(\Sigma)$.

BEWEIS: Sei zuerst $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$ gegeben. Wir können $\sigma = \sigma_\alpha$ für ein $\alpha \in \Sigma$ voraussetzen. Sei π ein SEW in Σ und sei $\{h_\beta, e_\gamma : \beta \in \pi, \gamma \in \Sigma\}$ eine Weyl-Chevalley-Basis in \mathcal{L} . Da σ_α eine isometrische Permutation von Σ ist, erfüllen die Strukturkonstanten

$$N_{\gamma, \gamma'} = N_{\sigma_\alpha \gamma, \sigma_\alpha \gamma'} \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Sigma$$

(vgl. Formel (2.18)) und die Zuordnung $h_\beta \mapsto h_{\sigma_\alpha \beta}, e_\gamma \mapsto e_{\sigma_\alpha \gamma}, \beta \in \pi, \gamma \in \Sigma$ erzeugt einen Automorphismus U von \mathcal{L} . Für beliebige $\varrho \in H^*$ gilt dann $Uh_\varrho = h_{\sigma_\alpha \varrho}$ und damit $(U^* \sigma_\alpha \gamma)(h_\varrho) = (\sigma_\alpha \gamma)(Uh_\varrho) = (\sigma_\alpha \gamma)(h_{\sigma_\alpha \varrho}) = \gamma(h_\varrho)$, also $U^* = \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha$.

Für die umgekehrte Richtung siehe [OV, §4.2, Thm. 10]. ■

Der Zusammenhang zwischen SEW, Weyl-Kammern und $\text{Ad}(\Sigma)$

Wir klären zuerst die Beziehung zwischen SEW und Weyl-Kammern.

Satz 2.17 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra und Σ das zugehörige Wurzelsystem. Es besteht ein 1:1-Zusammenhang zwischen der Menge der SEW in Σ und der Menge der Weyl-Kammern in $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$. Dabei wird dem SEW π die folgende Weyl-Kammer zugeordnet:

$$W_\pi = \{\varrho \in H_{\mathbb{R}}^* : (\alpha, \varrho) > 0 \quad \forall \alpha \in \pi\}. \quad (2.22)$$

BEWEIS: Sei π ein SEW in Σ . Die durch (2.22) definierte Menge W_π erfüllt $W_\pi \subseteq \tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$. Wir prüfen, daß W_π eine Weyl-Kammer ist: W_π ist zusammenhängend (mit zwei Punkten ist auch deren Verbindungsgerade enthalten) und offen in $H_{\mathbb{R}}^*$, also auch offen in $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$. W_π ist aber auch abgeschlossen in $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$, denn der Abschluß von W_π in $H_{\mathbb{R}}^*$ ist

$$\overline{W_\pi} = \{\varrho \in H_{\mathbb{R}}^* : (\alpha, \varrho) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \pi\}$$

und der Abschluß in $\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$ daher $\overline{W_\pi} \cap \tilde{H}_{\mathbb{R}}^* = W_\pi$.

Damit ist die Zuordnung (2.22) korrekt definiert. Wir überzeugen uns als nächstes davon, daß sie invertierbar ist. Sei dazu eine Weyl-Kammer W gegeben. Wir wählen eine geordnete Orthonormalbasis $\{\varrho_1, \dots, \varrho_\ell\}$ in $H_{\mathbb{R}}^*$ mit $\varrho_1 \in W$. Sei π_W das durch die zugehörige lexikografische Ordnung definierte SEW.

Behauptung: Es gilt $W = \{\varrho \in H_{\mathbb{R}}^* : (\alpha, \varrho) > 0 \quad \forall \alpha \in \pi_W\}$ (*).

Sei $\alpha \in \pi_W$. Da α positiv ist, gilt $(\alpha, \varrho_1) > 0$. Da die Abbildung $W \rightarrow \mathbb{R}, \varrho \mapsto (\alpha, \varrho)$, stetig ist und keine Nullstelle hat, folgt $(\alpha, \varrho) > 0 \quad \forall \varrho \in W, \alpha \in \pi$ und W ist in der rechten Seite von (*) enthalten. Da diese zusammenhängend ist, gilt Gleichheit. ■

Dieses Resultat wollen wir nun benutzen, um den Zusammenhang zwischen $\text{Ad}(\Sigma)$ und der Menge der SEW aufzudecken. Wir zeigen zunächst

Satz 2.18 *Jede Wurzel ist in einem SEW enthalten.*

BEWEIS: Sei $\alpha \in \Sigma$. Wir wählen ein $\varrho \in H_{\mathbb{R}}^*$ mit

$$(\varrho, \alpha) > 0, \quad |(\varrho, \beta)| > (\varrho, \alpha) \quad \forall \beta \in \Sigma, \beta \neq \pm\alpha.$$

Sei π das zur Weyl-Kammer von ϱ gehörende SEW. Es gilt $\alpha \in \pi$: Zumindest ist α positiv. Wäre es nicht einfach, dann gäbe es positive β_1, β_2 mit $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Aus der Positivität folgte $(\varrho, \beta_i) > 0$ und damit $(\varrho, \alpha) = (\varrho, \beta_1) + (\varrho, \beta_2) > 2(\varrho, \alpha)$ (Widerspruch). ■

Sei π ein SEW in Σ . Im folgenden benötigen wir das Funktional

$$\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha. \quad (2.23)$$

Es besitzt die Eigenschaft

$$\sigma_\alpha \delta = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \pi. \quad (2.24)$$

BEWEIS: Die Spiegelung σ_α bildet alle positiven Wurzeln außer α selbst wieder in positive Wurzeln ab: von den Entwicklungskoeffizienten von β und $\sigma_\alpha \beta$ bezüglich der Basis π unterscheiden sich nämlich nur die vor α . Folglich hat $\sigma_\alpha \beta$ für ein positives β , $\beta \neq \alpha$, mindestens einen positiven Koeffizienten und ist damit nach Satz 2.9 (c) wieder positiv. Es folgt $\sigma_\alpha \delta = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Sigma^+ \\ \beta \neq \alpha}} \sigma_\alpha \beta + \frac{1}{2} \sigma_\alpha \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\beta \in \Sigma^+ \\ \beta \neq \alpha}} \beta - \frac{1}{2} \alpha = \delta - \alpha$. ■

Aus Gleichung (2.24) folgt desweiteren $2(\delta, \alpha) = 2(\sigma_\alpha \delta, \sigma_\alpha \alpha) = -2(\delta, \alpha) + 2(\alpha, \alpha)$, also

$$\frac{2(\delta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 1 \quad \forall \alpha \in \pi. \quad (2.25)$$

Nun können wir mit unserer Untersuchung fortfahren.

Lemma 2.19 *Sei π ein SEW in Σ und G_π die von den Spiegelungen σ_α , $\alpha \in \pi$, erzeugte Untergruppe von $\text{Ad}(\Sigma)$. Zu jedem SEW π' in Σ gibt es ein $\sigma \in G_\pi$ mit $\sigma\pi' = \pi$.*

BEWEIS: Sei W_π die zu π gehörige Weyl-Kammer. Für $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$ gilt:

$$- \sigma\pi \text{ ist ein SEW in } \Sigma, \quad - \sigma W_\pi \text{ ist eine Weyl-Kammer}, \quad - \sigma W_\pi = W_{\sigma\pi}.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß man zu jedem $\varrho \in \tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$ ein $\sigma \in G_\pi$ findet, so daß $\sigma\varrho \in W_\pi$ gilt. Wir wählen dazu $\sigma \in G_\pi$ so, daß $(\sigma\varrho, \delta) = \max\{(\sigma'\varrho, \delta) : \sigma' \in G_\pi\}$. Für beliebige $\alpha \in \pi$ gilt dann $(\sigma\varrho, \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma\varrho, \delta) = (\sigma\varrho, \sigma_\alpha \delta) = (\sigma\varrho, \delta) - (\sigma\varrho, \alpha)$ (vgl. Formel (2.24)). Es folgt $(\sigma\varrho, \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \pi$ und damit die Behauptung. ■

Als Folgerung ergibt sich

Satz 2.20 *Sei π ein SEW in Σ . $\text{Ad}(\Sigma)$ wird von den Spiegelungen σ_α , $\alpha \in \pi$, erzeugt.*

BEWEIS: Sei $\beta \in \Sigma$. Nach Satz 2.18 gehört β zu einem SEW π' ; nach Lemma 2.19 findet man dann ein $\sigma \in G_\pi$, so daß $\sigma\beta \in \pi$. Damit ist $\sigma\beta = \sigma^{-1} \sigma_\beta \sigma \in G_\pi$. ■

Nun sind wir in der Lage, den Zusammenhang zwischen $\text{Ad}(\Sigma)$ und der Menge der SEW anzugeben.

Satz 2.21 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra und Σ das zugehörige Wurzelsystem. Die Weyl-Gruppe $\text{Ad}(\Sigma)$ wirkt transitiv und frei auf der Menge der SEW in Σ .*

ERLÄUTERUNG: Sei X eine Menge und G eine Gruppe von Abbildungen $X \rightarrow X$. Die Wirkung von G auf X heißt *transitiv*, falls für je zwei Elemente $x, x' \in X$ ein $g \in G$ existiert, so daß $x' = g(x)$; sie heißt *frei*, falls für beliebige $x \in X$, $g \in G$ gilt: aus $g(x) = x$ folgt $g = \text{id}_X$.

BEWEIS: Daß $\text{Ad}(\Sigma)$ auf der Menge der SEW *wirkt*, d. h. diese Menge in sich abbildet, hatten wir schon festgestellt. Die Wirkung ist transitiv nach Lemma 2.19. Im folgenden Lemma zeigen wir, daß sie frei ist:

Lemma 2.22 *Sei π ein SEW in Σ und sei $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$. Gilt $\sigma\pi = \pi$, dann ist $\sigma = \mathbb{1}$.*

BEWEIS: (indirekt) Nehmen wir an, es gilt $\sigma\pi = \pi$ und $\sigma \neq \mathbb{1}$. Nach Satz 2.20 können wir σ zerlegen in ein Produkt $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ (*), wobei $\alpha_i \in \pi_0$. Wir wählen die Zerlegung so, daß t minimal ist. Betrachten wir die Folge von Wurzeln

$$\beta_k := \sigma_{\alpha_k} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}} \alpha_t, \quad k = 1, \dots, t-1, \quad \beta_t := \alpha_t.$$

Nach Voraussetzung ist $\sigma\alpha_t$ positiv, also $\beta_1 = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}} \alpha_t = \sigma\sigma_{\alpha_t} \alpha_t = -\sigma\alpha_t < 0$. Da andererseits $\beta_t > 0$ ist, existiert ein Index s , so daß $\beta_{s+1} > 0$ und $\beta_s = \sigma_{\alpha_s} \beta_{s+1} < 0$ gilt. Nun beachten wir, daß die Spiegelung σ_{α_s} alle positiven Wurzeln außer α_s wieder in positive Wurzeln abbildet (vgl. den Beweis zu Formel (2.24)). Damit ist $\beta_{s+1} = \alpha_s$ und wir können schreiben $\sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_{s+1}} = \sigma_{(\sigma_{\alpha_{s+1}} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}) \alpha_t} = (\sigma_{\alpha_{s+1}} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}) \sigma_t (\sigma_{\alpha_{s+1}} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}})^{-1}$. Multiplizieren wir von links mit $\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{s-1}}$ und von rechts mit $\sigma_{\alpha_{s+1}} \dots \sigma_{\alpha_t}$, dann folgt $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_{s-1}} \sigma_{\alpha_{s+1}} \dots \sigma_{\alpha_{t-1}}$, im Widerspruch zur Minimalität der Zerlegung (*). ■

Der Zusammenhang zwischen $\text{Ad}(\Sigma)$, $\text{Aut}(\Sigma)$ und $\text{Aut}(\pi)$

Sei π ein SEW in Σ . Mit $\text{Aut}(\Sigma)$ bzw. $\text{Aut}(\pi)$ bezeichnen wir diejenigen Untergruppen von $O(H_{\mathbb{R}}^*)$, die Σ bzw. π invariant lassen.

Es ist klar, daß $\text{Aut}(\pi)$ genau aus den isometrischen Permutationen von π besteht.

Satz 2.23 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW in Σ . $\text{Aut}(\pi)$ ist eine Untergruppe, $\text{Ad}(\Sigma)$ eine normale Untergruppe von $\text{Aut} \Sigma$ und es gilt $\text{Aut}(\Sigma) = \text{Ad}(\Sigma) \rtimes \text{Aut}(\pi)$, wobei das semidirekte Produkt definiert ist durch die Multiplikation*

$$(\sigma', \tau') \circ (\sigma, \tau) = (\sigma' \circ (\tau' \circ \sigma \circ \tau'^{-1}), \tau' \circ \tau) \quad \forall \sigma, \sigma' \in \text{Ad}(\Sigma), \tau, \tau' \in \text{Aut}(\pi).$$

BEMERKUNG: Insbesondere gilt

$$\text{Aut}(\Sigma)/\text{Ad}(\Sigma) = \text{Aut}(\pi). \quad (2.26)$$

BEWEIS:

$\text{Aut}(\pi)$: Aus Satz 2.12 folgt Invarianz von Σ unter $\text{Aut}(\pi)$ und damit $\text{Aut}(\pi) \subseteq \text{Aut}(\Sigma)$.

$\text{Ad}(\Sigma)$: Nach Folgerung 2.15 ist $\text{Ad}(\Sigma)$ Untergruppe, nach Gleichung (2.21) normal.

Semidirekte Produktstruktur: Wir bilden das Mengenprodukt $\text{Ad}\Sigma \times \text{Aut}(\pi)$ und definieren eine Abbildung

$$\varphi : \text{Ad}(\Sigma) \times \text{Aut}(\pi) \rightarrow \text{Aut}(\Sigma), \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau. \quad (2.27)$$

φ ist injektiv: aus $\varphi(\sigma, \tau) = \sigma \circ \tau = \mathbb{1}$ folgt $\sigma\pi = \pi$, also $\sigma = \mathbb{1}$ und damit auch $\tau = \mathbb{1}$.

φ ist surjektiv: Sei $T \in \text{Aut}(\Sigma)$. Wegen der Isometrie von T ist $T\pi$ ein SEW in Σ und es gibt ein $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$ mit $T\pi = \sigma\pi$. Dann findet man eine Permutation τ von π , so daß $T|_{\pi} = \sigma \circ \tau|_{\pi}$. Diese muß aber isometrisch sein, d. h. $\tau \in \text{Aut}(\pi)$.

Versehen wir die Menge $\text{Ad}(\Sigma) \times \text{Aut}(\pi)$ schließlich mit der im Satz angegebenen Multiplikation, dann wird φ ein Gruppen-Morphismus (und folglich ein Isomorphismus). ■

Beispiele

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ Aus dem Beispiel zum Abschnitt 2.4 übernehmen wir die Cartan-Unteralgebra $H = \mathbb{C}(E_{(11)} - E_{(22)})$ und das zugehörige Wurzelsystem $\Sigma = \{\alpha_{12}, -\alpha_{12}\}$. Wir lesen unmittelbar ab:

$$\begin{aligned} \text{SEW: } \{\alpha_{12}\} \text{ und } \{-\alpha_{12}\}, & \quad \text{Aut}(\pi) = \{\mathbb{1}\}, & \quad \text{Ad}(\Sigma) = \text{Aut}(\Sigma) = \{\mathbb{1}, \sigma_{\alpha_{12}}\}, \\ P_{\alpha}^* = \{0\}, & \quad \tilde{H}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \quad \text{Weyl-Kammern: } \mathbb{R}_+ \text{ und } \mathbb{R}_-. \end{aligned}$$

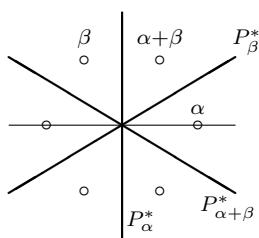
$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ Auch hier verwenden wir Cartan-Unteralgebra und Wurzelsystem aus dem Beispiel 2.4 sowie das SEW $\pi = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$ aus dem Beispiel zum Abschnitt 2.5. Wir setzen $\alpha := \alpha_{12}$ und $\beta := \alpha_{23}$. Nach Satz 2.20 wird die Weyl-Gruppe von $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$ erzeugt. Bestimmen wir ihre Elemente: $\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}$ und $\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}$ sind untereinander verschieden und als Drehungen verschieden von den Spiegelungen $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$. Mit $\sigma_{\alpha}\beta = \sigma_{\beta}\alpha = \alpha + \beta$ gilt außerdem $\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} = \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha+\beta}$, so daß sich jedes längere Produkt aus $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$ zu einem mit maximal drei Faktoren reduziert. Wir erhalten

$$\text{Ad}(\Sigma) = \{\mathbb{1}, \sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \sigma_{\alpha+\beta}, \sigma_{\beta}\sigma_{\alpha}, \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}\}.$$

$\text{Ad}(\Sigma)$ hat also die Ordnung 6. Damit gibt es auch 6 SEW:

$$\{\alpha, \beta\}, \quad \{-\alpha, -\beta\}, \quad \{-\alpha, \alpha + \beta\}, \quad \{\alpha, -\alpha - \beta\}, \quad \{-\beta, \alpha + \beta\}, \quad \{\beta, -\alpha - \beta\}.$$

Nun zeichnen wir uns $H_{\mathbb{R}}^*$ mit dem Wurzelsystem und den Hyperebenen $P_{\alpha}^*, P_{\beta}^*, P_{\alpha+\beta}^*$ auf:



Aus der Zeichnung lassen sich direkt die 6 Weyl-Kammern und die diesen zugeordneten SEW ablesen. Wir bestimmen $\text{Aut}(\Sigma)$: Dieses enthält

- die Drehungen R (um 60° entgegen dem Uhrzeigersinn), $R^2, R^3, R^4 = R^{-2}, R^5 = R^{-1}$,
- die Spiegelungen $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$ und $\sigma_{\alpha+\beta}$,
- die Spiegelungen S_{α}, S_{β} bzw. $S_{\alpha+\beta}$ an den Hyperebenen $\mathbb{R}\alpha, \mathbb{R}\beta$ bzw. $\mathbb{R}(\alpha + \beta)$ (mit $\mathbb{1}$ insgesamt 12 Transformationen). Schließlich lesen wir

$$\text{Aut}(\pi) = \{\mathbb{1}, S_{\alpha+\beta}\}$$

ab. Vergleichen wir nun $\text{Aut}(\Sigma)$ mit $\text{Ad}(\Sigma) \times \text{Aut}(\pi)$: Für den Isomorphismus (2.27) ergibt sich folgende Wertetabelle:

		Ad(Σ)					
		$\mathbb{1}$	σ_α	σ_β	$\sigma_\beta\sigma_\alpha$	$\sigma_\alpha\sigma_\beta$	$\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha$
Aut(π)	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	σ_α	σ_β	R^{-2}	R^2	$\sigma_{\alpha+\beta}$
	$S_{\alpha+\beta}$	$S_{\alpha+\beta}$	R	R^{-1}	S_α	S_β	R^3

(ÜA) Man zeige, daß die Weyl-Gruppe $\text{Ad}(\Sigma)$ aus dem zweiten Beispiel isomorph zur symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_3 ist.

2.7 Konjugation von Cartan-Unteralgebren

Wir haben gesehen, daß sich halbeinfache komplexe Lie-Algebren mit Hilfe von Wurzelsystemen bzw. SEW sehr elegant beschreiben lassen. Diese Beschreibung ändert sich nicht, wenn man innerhalb eines festen Wurzelsystems zu einem anderen SEW übergeht (Satz 2.21). Offen blieb bis jetzt jedoch, ob und wie sie sich ändert, wenn man eine andere Cartan-Unteralgebra zugrundelegt. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

Satz 2.24 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und seien H, H' Cartan-Unteralgebren mit Wurzelsystemen Σ, Σ' . Es gibt einen inneren Automorphismus U von \mathcal{L} mit $H' = UH$. Dieser erfüllt $U^*\Sigma' = \Sigma$ und $\mathcal{L}_{U^*\alpha'} = U^{-1}\mathcal{L}_{\alpha'} \quad \forall \alpha' \in \Sigma'$.

BEWEIS: Zum Beweis der Existenz siehe [Hu, §16] (mit den Mitteln, die wir uns bis jetzt erarbeitet haben) bzw. [Ja1, §IX.2] (mit Mitteln der algebraischen Geometrie).

Ist U gegeben, dann gilt

$$[h, U^{-1}e_{\alpha'}] = U^{-1}[Uh, e_{\alpha'}] = (U^*\alpha')(h) U^{-1}e_{\alpha'} \quad \forall h \in H, \alpha' \in \Sigma'.$$

Damit ist $U^*\alpha' \in \Sigma$ und $U^{-1}\mathcal{L}_{\alpha'}$ der zugehörige Wurzelunterraum. Aus der Bijektivität von U folgt $U^*\Sigma' = \Sigma$. ■

Wir wollen einige Folgerungen formulieren.

Satz 2.25 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Seien H, H' Cartan-Unteralgebren und π, π' SEW in den entsprechenden Wurzelsystemen Σ, Σ' . Dann gibt es einen inneren Automorphismus U von \mathcal{L} mit $H = UH'$ und $\pi' = U^*\pi$.

BEWEIS: Sei U_1 ein innerer Automorphismus mit $H = U_1H'$. Da $U_1^*\pi$ ein SEW in Σ' ist, gibt es ein $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma')$ mit $\pi' = \sigma \circ U_1^*\pi$ (Satz 2.21). Nach Satz 2.16 wird σ durch einen inneren Automorphismus U_2 mit der Eigenschaft $U_2H' = H'$ induziert: $\sigma = U_2^*|_{H'^*}$. Wir setzen $U := U_1 \circ U_2$. ■

Satz 2.26 Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra. Ein $h \in H$ ist genau dann regulär in \mathcal{L} , wenn $H = Z_{\mathcal{L}}(h)$. Insbesondere gibt es reguläre Elemente in H und es gilt $\dim(H) = \text{rg}(\mathcal{L})$ sowie $\dim(\mathcal{L}) = \text{rg}(\mathcal{L}) + \text{card}(\Sigma)$.

BEWEIS: Sei $h \in H$ regulär in \mathcal{L} . Da es Elemente $h' \in H$ mit $H = Z_{\mathcal{L}}(h')$ gibt und andererseits $Z_{\mathcal{L}}(h)$ minimal ist, gilt $H = Z_{\mathcal{L}}(h)$.

Genüge umgekehrt $h \in H$ der Bedingung $H = Z_{\mathcal{L}}(h)$. Wir finden ein in \mathcal{L} reguläres $x \in \mathcal{L}$. Der halbeinfache Teil x_s von x ist ebenfalls regulär in \mathcal{L} und in einer Cartan-Unteralgebra

enthalten. Nach Satz 2.24 gibt es einen inneren Automorphismus U , so daß $Ux_s \in H$. Ux_s ist aber wieder regulär. Damit gilt $Z_{\mathcal{L}}(h) = H = Z_{\mathcal{L}}(Ux_s)$ und h ist regulär. (Die beiden Formeln sind klar.) ■

Satz 2.24 liefert eine weitere Möglichkeit, Cartan-Unteralgebren zu charakterisieren:

Satz 2.27 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Eine Unteralgebra H ist genau dann Cartan-Unteralgebra, wenn es ein reguläres halbeinfaches Element $x \in \mathcal{L}$ mit der Eigenschaft $H = Z_{\mathcal{L}}(x)$ gibt.*

BEWEIS: Ist H Cartan-Unteralgebra, dann folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.26. Ist umgekehrt $H = Z_{\mathcal{L}}(x)$ für ein reguläres halbeinfaches $x \in \mathcal{L}$, dann gibt es eine Cartan-Unteralgebra H' mit $x \in H'$ und nach Satz 2.26 gilt $H' = Z_{\mathcal{L}}(x) = H$. ■

2.8 Die kompakte Form

Daß komplexe Lie-Algebren eine so reichhaltige Struktur besitzen, basiert im wesentlichen darauf, daß der Körper \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist. In der Physik relevant sind jedoch *reelle* Lie-Algebren. Nun ist zwar der Übergang von der reellen Algebra zur Komplexifizierung eindeutig, es gibt aber keinen kanonischen Weg zurück (verschiedene reelle Lie-Algebren können ein und dieselbe Komplexifizierung haben). Will man daher zur Untersuchung einer reellen Lie-Algebra die Theorie der komplexen Lie-Algebren nutzen, dann braucht man einen spezifischen Mechanismus, der die Komplexifizierung umkehrt.

Reelle Formen und Anti-Automorphismen

Satz 2.28 *Sei \mathcal{L} eine komplexe Lie-Algebra. Es besteht eine 1:1-Beziehung zwischen reellen Formen von \mathcal{L} und antilinearen⁶ Automorphismen σ von \mathcal{L} mit der Eigenschaft $\sigma^2 = \mathbb{1}$. Dabei wird σ der Eigenraum zum Eigenwert 1 zugeordnet.*

BEWEIS: Sei zunächst $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ eine reelle Form. Die identische Abbildung $\text{id}_{\mathcal{R}}$ läßt sich dann eindeutig zu einem antilinearen Automorphismus σ von \mathcal{L} fortsetzen:

Um das einzusehen, fixieren wir in \mathcal{L} eine Basis $\{x_i\}$ aus Elementen von \mathcal{R} und definieren $\sigma(\sum_i \lambda^i x_i) := \sum_i \bar{\lambda}^i x_i$ (dies ist offensichtlich unabhängig von der Basiswahl). Es gilt $\sigma^2 = \mathbb{1}$ und \mathcal{R} ist Eigenraum von σ zum Eigenwert 1.

Sei umgekehrt σ ein antilinearer Automorphismus mit $\sigma^2 = \mathbb{1}$ und sei \mathcal{R} der Eigenraum zum Eigenwert 1. Es gilt

$$\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x) = \lambda x, \quad \sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)] = [x, y] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathcal{R}.$$

Damit ist \mathcal{R} eine reelle Lie-Algebra. Wir prüfen $\mathcal{L} = \text{span}_{\mathbb{C}} \mathcal{R}$: Zerlegen wir $y \in \mathcal{L}$ in $\frac{1}{2}(y + \sigma(y)) + \frac{1}{2}(y - \sigma(y))$, dann liegt der erste Summand in \mathcal{R} und der zweite in $i\mathcal{R}$. ■

Die kompakte Form

Satz 2.29 *Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra, Σ das zugehörige Wurzelsystem, π ein SEW in Σ und $\{h_{\alpha}, e_{\beta} : \alpha \in \pi, \beta \in \Sigma\}$ eine*

⁶d. h. $\sigma(\lambda x) = \bar{\lambda} \sigma(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Weyl-Chevalley-Basis. Dann ist

$$\mathcal{R} := \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_{\beta} - e_{-\beta}, i(e_{\beta} + e_{-\beta}), ih_{\alpha} \quad : \quad \beta \in \Sigma, \alpha \in \pi\}$$

eine kompakte Form⁷ von \mathcal{L} . Zu jeder weiteren kompakten Form \mathcal{R}' gibt es einen inneren Automorphismus U von \mathcal{L} mit $\mathcal{R}' = U\mathcal{R}$.

BEWEIS: Wir zeigen hier nur, daß \mathcal{R} eine kompakte Form ist. Zur Eindeutigkeit modulo innerer Automorphismen siehe [OV, ch. 5, §1.4, Thm. 3].

Wir definieren einen antilinearen Automorphismus von \mathcal{L} durch

$$\sigma(e_{\alpha}) := -e_{-\alpha}, \quad \alpha \in \pi.$$

Er erfüllt die Bedingung $\sigma^2 = \mathbb{1}$, sein Eigenraum $\tilde{\mathcal{R}}$ zum Eigenwert 1 ist demzufolge eine reelle Form von \mathcal{L} . Offensichtlich gilt $\mathcal{R} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, müssen wir zunächst herausfinden, wie σ auf der Weyl-Chevalley-Basis $\{h_{\alpha}, e_{\beta}\}$ wirkt. Dazu zerlegen wir $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\alpha_i \in \pi$ und berechnen mit (2.17)

$$\begin{aligned} \sigma(e_{\beta}) &= \frac{1}{N_{\alpha_1, \alpha_2} \cdots N_{\alpha_{m-1}, \alpha_m}} \sigma([e_{\alpha_1}, [\cdots, [e_{\alpha_{m-1}}, e_{\alpha_m}] \cdots]]) \\ &= (-1)^m \frac{1}{N_{\alpha_1, \alpha_2} \cdots N_{\alpha_{m-1}, \alpha_m}} [e_{-\alpha_1}, [\cdots, [e_{-\alpha_{m-1}}, e_{-\alpha_m}] \cdots]] \\ &= (-1)^m \frac{N_{-\alpha_1, -\alpha_2} \cdots N_{-\alpha_{m-1}, -\alpha_m}}{N_{\alpha_1, \alpha_2} \cdots N_{\alpha_{m-1}, \alpha_m}} e_{-\beta} \\ &= -e_{-\beta}. \end{aligned}$$

Für die Cartan-Elemente folgt $\sigma(h_{\alpha}) = \sigma([e_{\alpha}, e_{-\alpha}]) = [\sigma(e_{\alpha}), \sigma(e_{-\alpha})] = -h_{\alpha}$.

Sei nun $y \in \tilde{\mathcal{R}}$. Es gilt $y = \frac{1}{2}(y + \sigma(y))$. Wir entwickeln nach der Weyl-Chevalley-Basis

$$y = \frac{1}{2}(y + \sigma(y)) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Sigma} y^{\beta} e_{\beta} + \sum_{\alpha \in \pi} y^{\alpha} h_{\alpha} - \sum_{\beta \in \Sigma} \bar{y}^{\beta} e_{-\beta} - \sum_{\alpha \in \pi} \bar{y}^{\alpha} h_{\alpha}$$

und formen um zu

$$\sum_{\beta \in \Sigma} \text{Re}(y^{\beta})(e_{\beta} - e_{-\beta}) + \sum_{\beta \in \Sigma} \text{Im}(y^{\beta})(i(e_{\beta} + e_{-\beta})) - \sum_{\alpha \in \pi} \text{Im}(y^{\alpha})(ih_{\alpha}).$$

Damit ist $y \in \mathcal{R}$. Es folgt $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$.

Schließlich prüfen wir, daß \mathcal{R} kompakt ist: Wegen $(ih_{\alpha}, ih_{\alpha}) = -(\alpha, \alpha) < 0 \quad \forall \alpha \in \pi$ und $(e_{\beta} - e_{-\beta}, e_{\beta} - e_{-\beta}) = (i(e_{\beta} + e_{-\beta}), i(e_{\beta} + e_{-\beta})) = -2 \quad \forall \beta \in \Sigma$ ist die Killing-Form negativ definit und induziert daher ein invariantes Skalarprodukt. ■

Aus den Sätzen 1.15 und 1.16 ergibt sich unmittelbar

Satz 2.30 Die klassischen halbeinfachen komplexen Lie-Algebren besitzen die folgenden kompakten Formen:

$$sl(n, \mathbb{C}), \quad n \geq 2: \quad su(n), \quad so(n, \mathbb{C}), \quad n \geq 3: \quad so(n), \quad sp(n, \mathbb{C}), \quad n \geq 1: \quad sp(n). \quad \blacksquare$$

⁷eine reelle Form, die als reelle Lie-Algebra kompakt ist

Kapitel 3

Klassifizierung

Im Satz 2.12 hatten wir festgestellt, daß die gesamte Information über die Struktur einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra in einem beliebigen ihrer SEW enthalten ist. Dies bringt uns auf den Gedanken, die halbeinfachen komplexen Lie-Algebren anhand ihrer SEW klassifizieren. Dazu müssen wir jedoch zuerst den Begriff des SEW, der an eine konkret vorgegebene Lie-Algebra gebunden ist, durch den abstrakt definierten Begriff des π -Systems verallgemeinern. Das verschafft uns eine 'Klasse von π -Systemen', die wir der 'Klasse der halbeinfachen komplexen Lie-Algebren' gegenüberstellen können. Sodann werden wir auf ersterer eine natürliche Äquivalenzrelation einführen, der auf der Seite der Algebren die Relation der Isomorphie entspricht. Die Äquivalenzklassen von π -Systemen können wir schließlich aufzählen.

3.1 π -Systeme und Dynkin-Diagramme

π -Systeme

Eine Teilmenge π eines Euklidischen Raumes heißt π -System, falls gilt

1. π ist linear unabhängig
2. für beliebige $\alpha, \beta \in \pi$ ist $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \leq 0$ und ganzzahlig.

Zwei π -Systeme π_1, π_2 seien *äquivalent*, falls es eine isometrische Bijektion $\phi : \pi_1 \rightarrow \pi_2$ gibt.

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra und Σ das entsprechende Wurzelsystem. Nach Satz 2.9 ist jedes SEW in Σ ein π -System in $H_{\mathbb{R}}^*$. Der folgende Satz verknüpft Isomorphieklassen von Lie-Algebren mit Äquivalenzklassen von SEW:

Satz 3.1 *Zwei halbeinfache komplexe Lie-Algebren \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 sind genau dann isomorph, wenn jedes SEW von \mathcal{L}_1 zu jedem SEW von \mathcal{L}_2 äquivalent ist. Insbesondere sind je zwei SEW einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra äquivalent.*

BEWEIS: Seien H_1, H_2 Cartan-Unteralgebren in $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ und seien π_1 bzw. π_2 SEW in den zugehörigen Wurzelsystemen Σ_1 bzw. Σ_2 .

(\Rightarrow) Sei $\phi : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ ein Isomorphismus. $\phi^{-1}H_2$ ist eine Cartan-Unteralgebra von \mathcal{L}_1 . Für $h \in H_2, \alpha \in \Sigma_2$ gilt $[\phi^{-1}h, \phi^{-1}e_\alpha] = \phi^{-1}[h, e_\alpha] = \alpha(h)\phi^{-1}e_\alpha = (\phi^*\alpha)(\phi^{-1}h)\phi^{-1}e_\alpha$, d. h. $\phi^{-1}H_2$ erzeugt das Wurzelsystem $\phi^*\Sigma_2$. Da $\phi^*\pi_2$ ein SEW in $\phi^*\Sigma_2$ ist, gibt es einen

inneren Automorphismus U von \mathcal{L}_1 mit $U^* \circ \phi^* \pi_2 = \pi_1$ (Satz 2.25). Nach Gleichung (1.8) ist $\phi \circ U$, und damit auch $U^* \circ \phi^*$, isometrisch.

(\Leftarrow) Sei $\psi : \pi_1 \rightarrow \pi_2$ eine isometrische Bijektion. ψ induziert einen isometrischen Vektorraum-Isomorphismus $\psi : H_1^* \rightarrow H_2^*$. Aus dem Rekonstruktionsalgorithmus im Beweis zu Satz 2.12 folgt $\psi(\Sigma_1) = \Sigma_2$ und $\psi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ ist ebenfalls eine isometrische Bijektion. Für die Strukturkonstanten $N_{\alpha, \alpha'}$ bzw. $M_{\beta, \beta'}$ von Weyl-Chevalley-Basen $\{e_\alpha^{(1)}\}$ in \mathcal{L}_1 bzw. $\{e_\beta^{(2)}\}$ in \mathcal{L}_2 gilt folglich $M_{\psi\alpha, \psi\alpha'} = \pm N_{\alpha, \alpha'} \quad \forall \alpha, \alpha' \in \Sigma_1$ (vgl. Formel (2.18)). Wählen wir die Basen so, daß kein negatives Vorzeichen auftritt, dann erzeugt die Zuordnung $e_\alpha^{(1)} \mapsto e_{\psi\alpha}^{(2)}$, $\alpha \in \Sigma_1$, einen Isomorphismus. ■

Dynkin-Diagramme

Sei π ein π -System. Wie bei den SEW (Gleichung (2.15)) definieren wir die Cartan-Matrix $A_{\alpha\beta}$ von π . Das *Dynkin-Diagramm* $D(\pi)$ von π erhalten wir auf folgende Weise: wir zeichnen für jedes Element von π einen Vertex, kennzeichnen diesen mit dem Betragsquadrat (α, α) und verbinden die Vertices von α und β durch $n = A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$ Linien. Wir bemerken:

1. Zwei π -Systeme sind genau dann äquivalent, wenn ihre Dynkin-Diagramme übereinstimmen. Dies erlaubt es uns, auch den halbeinfachen komplexen Lie-Algebren Dynkin-Diagramme zuzuordnen. Zwei halbeinfache komplexe Lie-Algebren sind genau dann isomorph, wenn ihre Dynkin-Diagramme übereinstimmen.
2. Jede Teilmenge $\pi_1 \subseteq \pi$ ist wieder ein π -System. Das Dynkin-Diagramm $D(\pi_1)$ besteht aus denjenigen Vertices von $D(\pi)$, die Elementen von π_1 entsprechen, und deren Verbindungslinien.
3. Die Cartan-Matrix von π läßt sich aus $D(\pi)$ rekonstruieren: man löst die Gleichungen

$$A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha} = \text{Anzahl der Linien zwischen } \alpha \text{ und } \beta, \quad \frac{A_{\alpha\beta}}{A_{\beta\alpha}} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}$$

unter den Nebenbedingungen $A_{\alpha\beta} \in \mathbf{Z}$ und $A_{\alpha\beta} \leq 0$.

Irreduzible π -Systeme

Sind π_1, π_2 π -Systeme in E_1, E_2 , dann ist $(\pi_1, 0) \cup (0, \pi_2) \stackrel{1}{|}$ ein π -System in $E_1 \oplus E_2$. Dieses nennen wir die *direkte Summe* von π_1 und π_2 und schreiben $\pi_1 \oplus \pi_2$. Bezeichnen wir die Cartan-Matrizen von π_1, π_2 mit A_1, A_2 , dann hat die Die Cartan-Matrix von $\pi_1 \oplus \pi_2$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$D(\pi_1 \oplus \pi_2) = D(\pi_1) \cup D(\pi_2). \quad (3.1)$$

Auf die Lie-Algebren übertragen liefert dies

Satz 3.2 *Seien \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 halbeinfache komplexe Lie-Algebren. Dann gilt*

$$D(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) = D(\mathcal{L}_1) \cup D(\mathcal{L}_2).$$

¹man beachte, daß die Elemente von $E_1 \oplus E_2$ Paare der Form (ϱ_1, ϱ_2) mit $\varrho_i \in E_i$ sind

BEWEIS: Sind H_1, H_2 Cartan-Unteralgebren in $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ die jeweiligen Wurzelsysteme und π_1, π_2 SEW in Σ_1, Σ_2 , dann ist $H_1 \oplus H_2$ Cartan-Unteralgebra in $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2, (\Sigma_1, 0) \cup (0, \Sigma_2)$ das zugehörige Wurzelsystem und $(\pi_1, 0) \cup (0, \pi_2) = \pi_1 \oplus \pi_2$ ein SEW darin. Die Behauptung folgt dann aus Gleichung (3.1). ■

Ein π -System π in E heißt *reduzibel*, falls es eine echte Teilmenge $\pi_1 \subset \pi$ mit $\pi_1 \perp (\pi \setminus \pi_1)$ enthält. In diesem Fall ist π_1 ein π -System in $E_1 := \text{span} \pi_1$, $\pi \setminus \pi_1$ ein π -System im orthogonalen Komplement E_1^\perp und es gilt $\pi = \pi_1 \oplus (\pi \setminus \pi_1)$. Ein π -System ist offensichtlich genau dann irreduzibel, wenn sein Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist. (Aus diesem Grunde spricht man zum Teil auch von zusammenhängenden statt von irreduziblen π -Systemen.) Im folgenden Lemma halten wir fest, was der Eigenschaft der Reduzibilität auf der Seite der Lie-Algebren entspricht.

Lemma 3.3 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW in Σ . \mathcal{L} enthält ein echtes Ideal genau dann, wenn π reduzibel ist.*

BEWEIS: Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$ ein echtes Ideal. Wir wissen, daß \mathcal{I} und \mathcal{I}^\perp halbeinfach sind und $\mathcal{L} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp$ gilt (vgl. Satz 1.8 bzw. 1.7). Nach Satz 3.2 ist dann $D(\pi) = D(\mathcal{L})$ nicht zusammenhängend.

Sei umgekehrt $\pi_1 \subset \pi$ eine echte Teilmenge mit $\pi_1 \perp (\pi \setminus \pi_1)$. Wir bilden $H_1 := (\text{span}_{\mathbb{C}} \pi_1)^*$ und $\Sigma_1 := \Sigma \cap H_1^*$ und setzen $\mathcal{I} := H_1 \oplus_{\alpha \in \Sigma_1} \mathcal{L}_\alpha$. Aus dem Rekonstruktionsalgorithmus im Beweis zu Satz 2.12 folgt, daß die Elemente von Σ entweder Linearkombinationen von π_1 oder von $\pi \setminus \pi_1$ sind. Dies impliziert

$$[\mathcal{L}_{\alpha_1}, \mathcal{L}_\alpha] = \{0\} \quad \forall \alpha_1 \in \Sigma_1, \alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_1, \quad \alpha|_{H_1^*} = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_1.$$

Damit gilt $[\mathcal{I}, \mathcal{L}_\alpha] = \{0\} \quad \forall \alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_1$ und \mathcal{I} ist Ideal. ■

Eine unmittelbare Folgerung ist

Satz 3.4 *Eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra ist genau dann einfach, wenn ihr Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist.* ■

Weiterhin liefert das Lemma die folgende wichtige Besonderheit einfacher komplexer Lie-Algebren:

Satz 3.5 *Auf einfachen komplexen Lie-Algebren sind je zwei ISBLF komplex proportional.*

BEWEIS: Wir zeigen, daß eine beliebige ISBLF B auf der einfachen komplexen Lie-Algebra \mathcal{L} proportional zur Killing-Form ist. Sei dazu H eine Cartan-Unteralgebra, Σ das Wurzelsystem und $\{y_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ ein System von Wurzelvektoren.

Ist $B = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei daher $B \neq 0$. Da die Menge $\{x \in \mathcal{L} : B(x, \mathcal{L}) = 0\}$ ein Ideal in \mathcal{L} bildet, ist B dann nicht ausgeartet.

• Seien $\alpha, \beta \in \Sigma$. Betrachten wir den Ausdruck $B(h_\alpha, [y_\beta, y_{-\beta}])$. Wir können ihn auf zwei verschiedene Arten umformen: einerseits zu $B([h_\alpha, y_\beta], y_{-\beta}) = (h_\alpha, h_\beta)B(y_\beta, y_{-\beta})$, andererseits mit Hilfe der Eigenschaft (6) in Abschnitt 2.2 zu $B(h_\alpha, h_\beta)(y_\beta, y_{-\beta})$. Für Wurzeln α, β mit $(h_\alpha, h_\beta) \neq 0$ gilt daher $\frac{B(h_\alpha, h_\beta)}{(h_\alpha, h_\beta)} = \frac{B(y_\beta, y_{-\beta})}{(y_\beta, y_{-\beta})}$ (*).

• Sei π ein SEW in Σ und sei $\alpha \in \pi$. Wir setzen $\lambda := \frac{B(y_\alpha, y_{-\alpha})}{(y_\alpha, y_{-\alpha})}$. Nach Lemma 3.3 ist π irreduzibel. Aus dem Rekonstruktionssatz 2.12 folgt dann, daß es zu jedem $\beta \in \Sigma$ eine Folge $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ von Wurzeln gibt, für die die Produkte $(h_\alpha, h_{\gamma_1}), \dots, (h_{\gamma_i}, h_{\gamma_{i+1}}), \dots, (h_{\gamma_r}, h_\beta)$ sämtlich verschieden von 0 sind. Wir erhalten damit aus (*) sukzessive

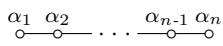
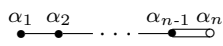
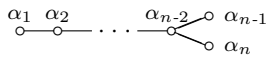
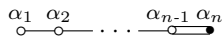
$$\frac{B(y_\beta, y_{-\beta})}{(y_\beta, y_{-\beta})} = \frac{B(h_\beta, h_{\gamma_r})}{(h_\beta, h_{\gamma_r})} = \frac{B(y_{\gamma_r}, y_{-\gamma_r})}{(y_{\gamma_r}, y_{-\gamma_r})} = \dots = \frac{B(h_{\gamma_1}, h_\alpha)}{(h_{\gamma_1}, h_\alpha)} = \frac{B(y_\alpha, y_{-\alpha})}{(y_\alpha, y_{-\alpha})} = \lambda.$$

Insbesondere gilt $B(h, h') = \lambda \cdot (h, h') \quad \forall h, h' \in H$. Aus der Invarianz von B ergibt sich schließlich, analog zur Eigenschaft (2) im Abschnitt 2.2,

- $B(y_\alpha, y_\beta) = 0 = (y_\alpha, y_\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma, \alpha \neq -\beta$
- $B(h, y_\alpha) = 0 = (h, y_\alpha) \quad \forall h \in H, \alpha \in \Sigma.$ ■

Beispiele: Cartan-Matrizen und Dynkin-Diagramme der klassischen halbeinfachen komplexen Lie-Algebren

Satz 3.6 *In der folgenden Tabelle sind die Dynkin-Diagramme und Cartan-Matrizen der klassischen halbeinfachen komplexen Lie-Algebren aufgelistet.²*

$sl(n+1, \mathbb{C}) \quad (n \geq 1)$	$sp(n, \mathbb{C}) \quad (n \geq 2)$
	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
$so(2n, \mathbb{C}) \quad (n \geq 4)$	$so(2n+1, \mathbb{C}) \quad (n \geq 2)$
	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -2 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Für die in der Tabelle nicht erfaßten Algebren gilt:

- $so(4, \mathbb{C})$ besitzt das Dynkin-Diagramm $\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \circ & \circ \end{matrix}$ und die Cartan-Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

²Die verschiedenen Arten von Vertices entsprechen den verschiedenen Längen der einfachen Wurzeln.

– $sp(1, \mathbb{C}) \cong sl(2, \mathbb{C})$, $so(3, \mathbb{C}) \cong sl(2, \mathbb{C})$, $so(6, \mathbb{C}) \cong sl(4, \mathbb{C})$.

Die Lie-Algebren $sl(n+1, \mathbb{C})$, $sp(n, \mathbb{C})$ für $n \geq 1$ sowie $so(n, \mathbb{C})$ für $n = 3$ und $n \geq 5$ sind einfach. Die Lie-Algebra $so(4, \mathbb{C})$ besitzt die Zerlegung $so(4, \mathbb{C}) \cong so(3, \mathbb{C}) \oplus so(3, \mathbb{C})$.

BEWEIS:

• $sl(n+1, \mathbb{C})$: Siehe das Beispiel zum Abschnitt 2.5.

• $sp(n, \mathbb{C})$: Da $sp(1, \mathbb{C})$ zu $sl(2, \mathbb{C})$ isomorph ist, setzen wir $n \geq 2$ voraus. Die Bestimmung der Wurzeln und die Berechnung der Cartan-Matrix verläuft größtenteils analog zum Beispiel $sl(n+1, \mathbb{C})$ in den Abschnitten 2.4 und 2.5. Zwischenschritte, die wir hier übergehen, findet man zum Teil dort genauer ausgeführt.

– Als Cartan-Unteralgebra H in $sp(n, \mathbb{C})$ nehmen wir die symplektischen Diagonalmatrizen. Nach Gleichung (1.13) haben sie die Gestalt $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$. Bei der Ermittlung der Wurzelvektoren brauchen wir wegen

$$[h, E_{(rs)}] = (h_{rr} - h_{ss})E_{(rs)}, \quad r, s = 1, \dots, 2n, h \in H$$

nur die $E_{(rs)}$ geeignet zu $sp(n, \mathbb{C})$ -Matrizen zu kombinieren (vgl. (1.13)):

$$\begin{aligned} E_{(ij)} - E_{(n+i, n+j)} & \text{ zu den Wurzeln } \alpha_{(ij)}^1 = E^{(ii)} - E^{(jj)}, & i, j = 1, \dots, n, i \neq j \\ E_{(i, n+j)} + E_{(j, n+i)} & \text{ zu den Wurzeln } \alpha_{(ij)}^2 = E^{(ii)} + E^{(jj)}, & i \leq j = 1, \dots, n \\ E_{(n+i, j)} + E_{(n+j, i)} & \text{ zu den Wurzeln } \alpha_{(ij)}^3 = -E^{(ii)} - E^{(jj)}, & i \leq j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Durch Abzählen prüfen wir wieder, daß es keine weiteren geben kann.

– Als nächstes bestimmen wir ein System einfacher Wurzeln. Wegen $E^{(ii)} = \frac{1}{2}\alpha_{(ii)}^2$ gehören die Funktionale $E^{(ii)}$, $i = 1, \dots, n$, zu H_0^* und bilden darin eine geordnete Basis. Bezüglich der zugehörigen lexikografischen Ordnung sind die $\alpha_{(ij)}^1$ mit $i < j$ und alle $\alpha_{(ij)}^2$ positiv. Desweiteren sehen wir sofort, daß die Wurzeln $\alpha_i := \alpha_{(i, i+1)}^1$, $i = 1, \dots, n-1$ einfach und alle anderen $\alpha_{(ij)}^1$ zusammengesetzt sind. Wegen $\dim(H) = n$ muß sich also unter den $\alpha_{(ij)}^2$ noch eine einfache Wurzel befinden. $\alpha_{(ij)}^2$ ist aber für $i \leq j < n$ zerlegbar in $\alpha_{(in)}^1 + \alpha_{(nn)}^2 + \alpha_{(jn)}^1$ und für $i < j = n$ in $\alpha_{(in)}^1 + \alpha_{(nn)}^2$. Folglich ist die fehlende einfache Wurzel $\alpha_n := \alpha_{(nn)}^2$.

– Unter Verwendung von Lemma 1.13 ergibt sich für den Isomorphismus $H \rightarrow H^*$

$$h_{E^{(ii)}} = \frac{1}{2(n+1)} E^{(ii)} - E_{(i+n, i+n)}.$$

und daraus für die Killing-Form auf H^* $(E^{(ii)}, E^{(jj)}) = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{ij}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \alpha_{(j)}) &= \frac{1}{2(n+1)} (2\delta_{ij} - \delta_{i, j+1} - \delta_{i, j-1}), & i, j = 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_i, \alpha_n) &= -\frac{1}{n+1} \delta_{i+1, n}, & i = 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_n, \alpha_n) &= \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Beim Zeichnen des Dynkin-Diagrammes müssen wir beachten, daß die einfachen Wurzeln unterschiedlich lang sind: $(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{1}{2(n+1)}$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $(\alpha_n, \alpha_n) = \frac{1}{n+1}$.

• $so(m, \mathbb{C})$: Da diese Lie-Algebren keine von $\mathbf{0}$ verschiedenen Diagonal-Matrizen enthalten, werden die Rechnungen sehr umständlich. Aus diesem Grunde versuchen wir, eine andere, zu $so(m, \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra von $gl(m, \mathbb{C})$ zu finden, die eine Cartan-Unteralgebra aus Diagonalmatrizen besitzt.

Jeder Vektorraum-Automorphismus T von \mathbb{C}^m erzeugt durch $A \mapsto T^{-1}AT$ einen Automorphismus der Lie-Algebra $gl(m, \mathbb{C})$. Wir setzen $\mathcal{L}_T := T^{-1}so(m, \mathbb{C})T$. Es gilt $A \in \mathcal{L}_T$ gdw. $(TAT^{-1})^t + TAT^{-1} = 0$. Diese Bedingung bringen wir in eine Form, die der definierenden Gleichung für die sp -Algebren sehr ähnlich ist:

$$A^t (T^t T) + (T^t T) A = 0. \quad (*)$$

Wenn wir T geeignet wählen, können wir vielleicht Ergebnisse übernehmen oder zumindest gewisse Analogien nutzen.

Wir betrachten die Fälle $m = 2n$ und $m = 2n + 1$ separat.

• $so(2n, \mathbb{C})$: Da $so(2, \mathbb{K})$ kommutativ ist, setzen wir $n \geq 2$ voraus. Wir finden eine Matrix T mit $T^t T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$: z. B. $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{1} & \mathbf{i} \end{pmatrix}$ (T ist zusätzlich unitär). Schreiben wir $(2n \times 2n)$ -Matrizen in Blockgestalt (1.12), dann ist $A \in \mathcal{L}_T$ nach $(*)$ äquivalent zu

$$A_{22} = -A_{11}^t, \quad A_{12}^t = -A_{12}, \quad A_{21}^t = -A_{21}.$$

Die Diagonalmatrizen aus \mathcal{L}_T bilden eine Cartan-Unteralgebra H . Diese stimmt offensichtlich mit der von $sp(n, \mathbb{C})$ aus dem vorigen Punkt überein. Die Wurzelvektoren kombinieren wir wie dort aus den Matrizen $E_{(rs)}$, $r, s = 1, \dots, 2n$:

$$E_{(ij)} - E_{(n+i, n+j)} \quad \text{zu den Wurzeln} \quad \alpha_{(ij)}^1 = E^{(ii)} - E^{(jj)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j,$$

$$E_{(in+j)} - E_{(jn+i)} \quad \text{zu den Wurzeln} \quad \alpha_{(ij)}^2 = E^{(ii)} + E^{(jj)}, \quad i < j = 2, \dots, n,$$

$$E_{(n+i, j)} - E_{(n+j, i)} \quad \text{zu den Wurzeln} \quad \alpha_{(ij)}^3 = -E^{(ii)} - E^{(jj)}, \quad i < j = 2, \dots, n$$

(bei den erlaubten Werten von i und j in der zweiten und dritten Gruppe kommt die gegenüber $sp(n, \mathbb{C})$ veränderte Forderung an die Blöcke A_{12} und A_{21} zum Tragen). Wegen $E^{(ii)} = \alpha_{(ij)}^1 + \alpha_{(ij)}^2$, $j \neq i$, bilden die Funktionale $E^{(ii)}$, $i = 1, \dots, n$, eine geordnete Basis in H_0^* . Die einfachen Wurzeln sind

$$\alpha_i := \alpha_{(i, i+1)}^1, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \alpha_n := \alpha_{(n-1, n)}^2.$$

Für die induzierte Bilinearform auf H^* ergibt sich $(E^{(ii)}, E^{(jj)}) = \frac{1}{2(n-1)} \delta_{ij}$. Es folgt

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \alpha_j) &= \frac{1}{2(n-1)} (2\delta_{ij} - \delta_{i, j+1} - \delta_{i, j-1}), & i, j = 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_i, \alpha_n) &= -\frac{1}{2(n-1)} \delta_{i, n-2}, & i = 1, \dots, n-1 \\ (\alpha_n, \alpha_n) &= \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Daraus können wir wieder die Cartan-Matrix ablesen. Diesmal haben alle einfachen Wurzeln die gleiche Länge.

Diskutieren wir das Ergebnis für kleine n :

$n = 2$: Die Wurzeln $\alpha_{(1)}$ und $\alpha_{(2)}$ sind nicht miteinander verbunden, d. h. das Dynkin-Diagramm zerfällt in zwei einzelne Vertices und die Sätze 3.4 und 3.2 liefern die Isomorphie $so(4, \mathbb{C}) \cong so(3, \mathbb{C}) \oplus so(3, \mathbb{C})$ (natürlich kann man statt $so(3, \mathbb{C})$ auch $sl(2, \mathbb{C})$ einsetzen).

$n = 3$: Es ergibt sich die Cartan-Matrix und das Dynkin-Diagramm von $sl(4, \mathbb{C})$, womit nach Satz 3.1 beide Lie-Algebren isomorph sind.

Für $n \geq 4$ enthält das Dynkin-Diagramm eine Verzweigung, da α_n nicht mit $\alpha_{(n-1)}$, sondern mit $\alpha_{(n-2)}$ verbunden ist.

• $so(2n+1, \mathbb{C})$: Wegen der Isomorphie $so(3, \mathbb{C}) \cong sl(2, \mathbb{C})$ setzen wir $n \geq 2$ voraus.

$((2n+1) \times (2n+1))$ -Matrizen schreiben wir in der Form $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ c & A & B \\ d & C & D \end{pmatrix}$ mit $(n \times n)$ -Matrizen A, B, C, D , \mathbb{C}^n -Vektoren a, b, c, d und einer komplexen Zahl λ , wobei die oberste Spalte und die linke Zeile den Index 0 erhalten. Das Beste, was wir erwarten können, ist eine Transformation T' mit $T'^t T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Eine solche finden wir auch: z. B.

$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ (sie ist wieder zusätzlich unitär). Aus der Bedingung $(*)$ erhalten wir $\lambda = 0$, $d = -a$, $c = -b$, $D = -A^t$, $B^t = -B$, $C^t = -C$. Identifizieren wir

$\mathcal{L}_T = T^{-1} \left(so(2n, \mathbb{C}) \right) T$ aus dem vorangegangenen Beweisabschnitt mit der Unteralge-

bra $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_T & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, dann ist die Cartan-Unteralgebra H von \mathcal{L}_T auch hier eine Cartan-Unteralgebra und die Wurzelvektoren von \mathcal{L}_T sind wieder Wurzelvektoren zu denselben Wurzeln (man beachte aber, daß die $E_{(rs)}$, $r, s = 1, \dots, 2n$, jetzt $((2n+1) \times (2n+1))$ -Matrizen sind). Zusätzlich finden wir noch

$$\begin{aligned} E_{(0i)} - E_{(n+i0)} & \text{ zu den Wurzeln } \alpha_{(i)}^4 = -E^{(ii)}, & i = 1, \dots, n, \\ E_{(0n+i)} - E_{(i0)} & \text{ zu den Wurzeln } \alpha_{(i)}^5 = E^{(ii)}, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Legen wir wieder die von $\{E^{(ii)} : i = 1, \dots, n\}$ erzeugte lexikografische Ordnung zugrunde, so sind die einfachen Wurzeln

$$\alpha_i := \alpha_{(i+1)}^1, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \alpha_n := \alpha_{(n)}^5.$$

Schließlich erhalten wir $(E^{(ii)}, E^{(jj)}) = \frac{1}{2n-1} \delta_{ij}$ und damit

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \alpha_j) &= \frac{1}{2n-1} (2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}), & i, j = 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_i, \alpha_n) &= -\frac{1}{2n-1} \delta_{i+1n}, & i = 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_n, \alpha_n) &= \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Wir bei $sp(n, \mathbb{C})$ treten zwei verschiedene Längen von einfachen Wurzeln auf. Wir bemerken außerdem, daß die Cartan-Matrizen von $sp(n, \mathbb{C})$ und $so(2n+1, \mathbb{C})$ zueinander transponiert sind. ■

3.2 Klassifizierung

Zu Beginn bemerken wir, daß für zwei beliebige Elemente α, β eines π -Systems, die durch $n = 1, 2, 3$ Linien verbunden sind, entweder $A_{\alpha\beta}$ oder $A_{\beta\alpha}$ den Wert -1 haben muß. Für das Verhältnis der Betragsquadrate gilt im ersten Fall $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{A_{\alpha\beta}}{A_{\beta\alpha}} = \frac{A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}}{A_{\beta\alpha}^2} = n$ und

im zweiten Fall entsprechend $\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = n$. Insbesondere haben in einem π -System mit dem Dynkin-Diagramm $\circ - \circ - \dots - \circ - \circ$, welches wir *homogene Folge* nennen, alle Elemente dieselbe Länge. Die Cartan-Matrix einer homogenen Folge der Länge ℓ ist natürlich die von $sl(\ell+1, \mathbb{C})$ (siehe Satz 3.6).

Wir wollen zunächst einige Eigenschaften von Dynkin-Diagrammen ableiten. Sei dazu ein π -System $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ in dem Euklidischen Raum E vorgegeben.

(1) $D(\pi)$ hat mehr Vertices als verbundene Paare von Vertices.

Wir bilden $\gamma := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\alpha_i}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 < (\gamma, \gamma) &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}\sqrt{(\alpha_j, \alpha_j)}} = \ell + \sum_{i<j} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}(\alpha_j, \alpha_j)} \\ &= \ell - \sum_{i<j} \sqrt{A_{\alpha_i\alpha_j}A_{\alpha_j\alpha_i}}. \end{aligned}$$

ℓ ist gerade die Anzahl der Vertices und die Summe $\sum_{i<j} \sqrt{A_{\alpha_i\alpha_j}A_{\alpha_j\alpha_i}}$ ist auf jeden Fall größer oder gleich der Anzahl der verbundenen Paare von Vertices. ■

(2) $D(\pi)$ enthält keinen Zyklus³.

Da jede Teilmenge eines π -Systems wieder ein π -System ist, muß in jedem Teilstück von

³d. h. keine Schleife

$D(\pi)$ die Anzahl der verbundenen Paare kleiner als die Anzahl der Vertices sein. In einem Zyklus ist das aber nicht erfüllt. ■

(3) Sei $\pi_1 \subseteq \pi$. Ist π_1 irreduzibel, dann gibt es zu jedem $\beta \in \pi \setminus \pi_1$ höchstens ein $\alpha \in \pi_1$, das mit β verbunden ist.

Anderenfalls enthielte $D(\pi)$ einen Zyklus. ■

(4) Von einem Vertex können maximal drei Linien ausgehen.

Sei α_0 mit den Vertices $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ verbunden. Dann ist $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ein Orthogonalsystem (sonst gäbe es einen Zyklus) und wir haben wegen der linearen Unabhängigkeit von π die strenge Ungleichung $\sum_{i=1}^m \frac{|(\alpha_0, \alpha_i)|^2}{(\alpha_i, \alpha_i)} < (\alpha_0, \alpha_0)$. Multiplizieren wir mit $\frac{4}{(\alpha_0, \alpha_0)}$, so erhalten wir $\sum_{i=1}^m A_{\alpha_0 \alpha_i} A_{\alpha_i \alpha_0} = \text{Anzahl der von } \alpha_0 \text{ ausgehenden Linien} < 4$. ■

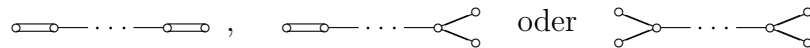
(5) Enthält π eine homogene Folge π_1 , so bildet $\pi' := \pi \setminus \pi_1$, zusammen mit dem Vektor $\sum_{\alpha \in \pi_1} \alpha$, wieder ein π -System. Dessen Dynkin-Diagramm entsteht aus $D(\pi)$ durch Zusammenziehen des Teilstücks $D(\pi_1)$ zu einem einzigen Vertex.

Die Elemente von π_1 bezeichnen wir mit $\alpha_i, i = 1, \dots, l$. Wir setzen $\alpha := \sum_{i=1}^l \alpha_i$ und $\tilde{\pi} := \pi' \cup \{\alpha\}$. Es ist klar, daß $\tilde{\pi}$ linear unabhängig und $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \sum_{i=1}^l \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\beta, \beta)}$ für alle $\beta \in \pi'$ ganzzahlig und nichtpositiv ist. Prüfen wir, ob dies auch auf $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ zutrifft: Aus $2(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = A_{\alpha_{i+1} \alpha_i}(\alpha_i, \alpha_i) = -(\alpha_i, \alpha_i)$ ergibt sich $(\alpha, \alpha) = (\alpha_l, \alpha_l)$ und folglich $(\alpha, \alpha) = (\alpha_i, \alpha_i), i = 1, \dots, l$. Damit gilt $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \sum_{i=1}^l \frac{2(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, wobei die Summe natürlich ganzzahlig und nichtpositiv ist.

Betrachten wir schließlich $D(\tilde{\pi})$: Gegenüber $D(\pi')$ besitzt es den zusätzlichen Vertex α . Die Anzahl der Linien von α nach $\beta \in \pi'$ ist $A_{\alpha \beta} A_{\beta \alpha} = \sum_{j,k=1}^l \frac{2(\alpha_j, \beta)}{(\beta, \beta)} \frac{2(\beta, \alpha_k)}{(\alpha_k, \alpha_k)}$. Da π_1 irreduzibel ist, kann es nach (3) zu jedem β nur höchstens ein $\alpha_m \in \pi_1$ mit $(\alpha_m, \beta) \neq 0$ geben. Es folgt $A_{\alpha \beta} A_{\beta \alpha} = A_{\alpha_m \beta} A_{\beta \alpha_m} = \sum_{i=1}^l A_{\alpha_i \beta} A_{\beta \alpha_i}$ und damit die Behauptung. ■

(6) Sei π irreduzibel. Dann enthält $D(\pi)$ höchstens einen Abschnitt der Form $\circ \text{---} \circ$ (A) bzw. $\circ \text{---} \circ$ (B) (Länge der Vertices nicht spezifiziert).

Nehmen wir an, die Behauptung wäre falsch. Dann besitzt $D(\pi)$ mindestens zweimal den Abschnitt (A), mindestens einmal (A) und einmal (B) oder mindestens zweimal (B). Da $D(\pi)$ zusammenhängend ist, muß es also ein Teilstück der Form



enthalten. Ziehen wir die homogene Folge entsprechend (5) zu einem Punkt zusammen, so erhalten wir ein Diagramm, das einen Vertex besitzt, von dem vier Linien ausgehen (Widerspruch zu (4)). ■

(7) Die Elemente von irreduziblen π -Systemen haben höchstens zwei verschiedene Längen.

Wegen (4) trifft die Bemerkung am Anfang dieses Abschnitts auf beliebige Paare von Vertices zu. Insbesondere ist die Länge zweier miteinander verbundener Vertices nur dann verschieden, wenn sie durch mehr als eine Linie verbunden sind. Nach (6) und (4) gibt es aber im Dynkin-Diagramm eines irreduziblen π -Systems höchstens eine solche Stelle. ■

Die langen Wurzeln eines irreduziblen π -Systems werden wir mit dem Vertex \circ und die kurzen mit dem Vertex \bullet kennzeichnen. Falls in einem π -Systems nur eine Länge auftritt, wollen wir die Elemente als lang betrachten.

Sei π ein irreduzibles π -System in E und sei $\alpha_0 \in \pi$ ein langes Element. Wir setzen $a := \frac{2}{(\alpha_0, \alpha_0)}$. Das Skalarprodukt

$$\langle \alpha, \alpha \rangle := a \cdot (\alpha, \alpha)$$

auf E nennen wir *kanonisch normiertes Skalarprodukt* (in Bezug auf π)⁴. Für die langen Elemente von π gilt $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$.

Sei π nun speziell ein SEW im Wurzelsystem einer Cartan-Unteralgebra H einer einfachen Lie-Algebra \mathcal{L} . Jede nicht ausgeartete ISBLF auf \mathcal{L} induziert eine Bilinearform auf H^* und diese wiederum, durch Einschränkung, ein Skalarprodukt auf $H_{\mathbb{R}}^*$. Nach Satz 3.5 gibt es genau eine nicht ausgeartete ISBLF $\langle x, y \rangle$ auf \mathcal{L} , deren induziertes Skalarprodukt $\langle \varrho, \sigma \rangle$ auf $H_{\mathbb{R}}^*$ kanonisch normiert bezüglich π ist. Diese nennen wir *kanonisch normierte ISBLF*. Es gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{a} (x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \langle \varrho, \sigma \rangle = a (\varrho, \sigma) \quad \forall \varrho, \sigma \in H_{\mathbb{R}}^* \quad (3.2)$$

BEWEIS: Die zweite Gleichung ist gerade die Definition des kanonisch normierten Skalarproduktes auf $H_{\mathbb{R}}^*$. Wir brauchen uns also nur zu überlegen, daß sie aus der ersten folgt. Der von der ISBLF $\langle x, y \rangle$ definierte Isomorphismus $H^* \rightarrow H$, $\varrho \mapsto \tilde{h}_\varrho$, ist gegeben durch die Gleichung $\langle \tilde{h}_\varrho, h \rangle = \varrho(h) \quad \forall h \in H$ und die induzierte Bilinearform auf H^* durch $\langle \varrho, \sigma \rangle = \langle \tilde{h}_\varrho, \tilde{h}_\sigma \rangle$. Für den durch die Killing-Form definierten Isomorphismus $H^* \rightarrow H$, $\varrho \mapsto h_\varrho$ bzw. die induzierte Bilinearform gilt entsprechend $(h_\varrho, h) = \varrho(h) \quad \forall h \in H$ bzw. $(\varrho, \sigma) = (h_\varrho, h_\sigma)$. Mit $\langle \tilde{h}_\varrho, h \rangle = \varrho(h) = (h_\varrho, h) = a \langle h_\varrho, h \rangle$ ergibt sich $\tilde{h}_\varrho = a h_\varrho$. Es folgt $\langle \varrho, \sigma \rangle = \langle \tilde{h}_\varrho, \tilde{h}_\sigma \rangle = a^2 \langle h_\varrho, h_\sigma \rangle = a \langle h_\varrho, h_\sigma \rangle$. ■

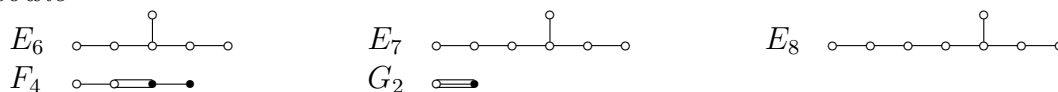
Nun wollen wir die Klassifizierung durchführen:

Satz 3.7 (Klassifizierung der irreduziblen π -Systeme)

Die Äquivalenzklassen irreduzibler π -Systeme sind gegeben durch die Dynkin-Diagramme



sowie



⁴Offensichtlich definieren äquivalente π -Systeme in E ein und dasselbe kanonisch normierte Skalarprodukt.

Satz 3.8 (Klassifizierung der einfachen komplexen Lie-Algebren)

Die Isomorphieklassen einfacher komplexer Lie-Algebren entsprechen 1:1 den Äquivalenzklassen irreduzibler π -Systeme.

BEMERKUNGEN:

1. Zu den Diagrammen sind jeweils die Standardbezeichnungen angegeben. Die Zahl ℓ im Index ist gerade die Anzahl der Vertices (\equiv Anzahl der einfachen Wurzeln \equiv Rang der Lie-Algebra). Die Einschränkungen an die Werte von ℓ sind nötig, um Doppelbenennungen auszuschließen.

2. Aus Satz 3.6 lesen wir ab: von den klassischen einfachen komplexen Lie-Algebren gehört

- $sl(n+1, \mathbb{C})$ zur Klasse A_n
- $so(2n+1, \mathbb{C})$ für $n \geq 2$ zu B_n , $so(3, \mathbb{C})$ zu A_1
- $so(2n, \mathbb{C})$ für $n \geq 4$ zu D_n , $so(6, \mathbb{C})$ zu A_3 ⁵
- $sp(n, \mathbb{C})$ für $n \geq 3$ zu C_n , $sp(2, \mathbb{C})$ zu B_2 ; $sp(1, \mathbb{C})$ zu A_1 .

Deshalb nennt man A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ und D_ℓ *klassische Serien*.

3. Die Lie-Algebren E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 werden *exzeptionelle* Lie-Algebren genannt.

BEWEIS DES SATZES 3.7: Der einfacheren Schreibweise wegen verwenden wir das kanonisch normierte Skalarprodukt. Wir arbeiten alle Möglichkeiten der Reihe nach ab:

- Diagramme, die eine Verbindung mit mehr als zwei Linien enthalten: Nach (4) gibt es nur eines, nämlich G_2 .
- Diagramme, die mindestens eine Verbindung mit zwei Linien besitzen: Nach (6) haben sie die Form

$$\alpha_1 \text{---} \dots \text{---} \alpha_s \text{---} \beta_t \text{---} \dots \text{---} \beta_1.$$

Behauptung: Es gilt $(s-1)(t-1) < 2$.

Wir bilden $\alpha := \sum_{j=1}^s j\alpha_j$ und $\beta := \sum_{j=1}^t j\beta_j$. Da α und β linear unabhängig sind, ist $|\langle \alpha, \beta \rangle|^2 < \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$ (*). Wir bestimmen die Skalarprodukte: Aus dem Diagramm lesen wir $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = 0$, $i < s, j < t$, $\langle \beta_j, \beta_j \rangle = 1$, $j = 1, \dots, t$ und $A_{\alpha_s \beta_t} = -2$ ab und berechnen damit $\langle \alpha, \beta \rangle = s t \langle \alpha_s, \beta_t \rangle = \frac{1}{2} s t A_{\alpha_s \beta_t} \langle \beta_t, \beta_t \rangle = -s t$.

Mit $\langle \alpha, \alpha_i \rangle = 0$, $i < s$, $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$, $i = 1, \dots, s$, und $A_{\alpha_{s-1} \alpha_s} = -1$ erhalten wir $\langle \alpha, \alpha \rangle = s \langle \alpha, \alpha_s \rangle = s \left((s-1) \langle \alpha_{s-1}, \alpha_s \rangle + s \langle \alpha_s, \alpha_s \rangle \right) = s(s+1)$; auf analoge Weise ergibt sich $\langle \beta, \beta \rangle = \frac{1}{2} t(t+1)$. Einsetzen in (*) liefert die Behauptung.

Es gibt also folgende Möglichkeiten:

- $s = 1$ und t beliebig (Serie C_n)
- $t = 1$ und s beliebig (Serie B_n)
- $s = t = 2$ (F_4).

• Diagramme, in denen alle Verbindungen nur aus einer Linie bestehen: Diese besitzen nach (6) entweder *keine* oder *eine* Verzweigung. Erstere ergeben die Serie A_n . Letztere haben die allgemeine Form

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \dots & \alpha_s & \eta & \beta_t & \dots & \beta_1 \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ & & & \downarrow \gamma_r & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \downarrow \gamma_1 & & & \end{array}.$$

Behauptung: Es gilt $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{r+1} > 1$.

⁵ $so(2, \mathbb{C})$ ist kommutativ und $so(4, \mathbb{C})$ ist nicht einfach, beide gehören also zu keiner der Klassen

Wir bilden wieder $\alpha := \sum_{j=1}^s j\alpha_j$ und analog dazu β und γ . Aus dem Diagramm lesen wir ab, daß α, β, γ paarweise orthogonal sind. Damit gilt

$$\frac{|\langle \alpha, \eta \rangle|^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{|\langle \beta, \eta \rangle|^2}{\langle \beta, \beta \rangle} + \frac{|\langle \gamma, \eta \rangle|^2}{\langle \gamma, \gamma \rangle} < \langle \eta, \eta \rangle \quad (*).$$

Analog zum vorangegangenen Punkt berechnen wir $\langle \alpha, \alpha \rangle = s(s+1)$, $\langle \beta, \beta \rangle = t(t+1)$ und $\langle \gamma, \gamma \rangle = r(r+1)$ sowie $\langle \alpha, \eta \rangle = s\langle \alpha_{s-1}, \eta \rangle = -s$, $\langle \beta, \eta \rangle = -t$ und $\langle \gamma, \eta \rangle = -r$. Durch Einsetzen in (*) ergibt sich die Behauptung.

Zählen wir nun die möglichen Fälle auf. Aus Symmetriegründen können wir $r \geq s \geq t$ wählen. Dann muß $t = 1$ sein und für die Werte von s und r gibt es folgende Möglichkeiten:

- $s = 1, r$ beliebig (Serie D_n)
- $s = 2, r = 2, 3, 4$ (exzeptionelle Diagramme E_6, E_7, E_8)

• Jetzt müssen wir uns noch überlegen, daß jedes Diagramm aus dem Satz auch wirklich von einem π -System erzeugt wird, denn es könnte ja sein, daß wir einige Eigenschaften, die die möglichen Diagramme einschränken, übersehen haben. Für die unendlichen Serien sind solche π -Systeme zum Beispiel durch SEW in den klassischen einfachen Lie-Algebren gegeben. Für die exzeptionellen Diagramme siehe zum Beispiel [Hu, §12.1]. ■

BEWEIS DES SATZES 3.8: Es genügt zu zeigen, daß zu jedem π -System π in einem Euklidischen Raum E eine einfache komplexe Lie-Algebra \mathcal{L} existiert, deren SEW äquivalent zu π sind. Dazu konstruieren wir aus π eine Teilmenge Σ von E auf die im Beweis zum Rekonstruktionssatz 2.12 (a) beschriebene Weise und prüfen, daß diese die Voraussetzungen des folgenden Lemmas erfüllt:

Lemma 3.9 Sei $(E, (\cdot, \cdot))$ ein Euklidischer Raum und sei $\Sigma \subseteq E$ eine endliche Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

- $E = \text{span}_{\mathbb{R}} \Sigma, \quad 0 \notin \Sigma$
- Ist $\alpha \in \Sigma$, dann sind α und $-\alpha$ die einzigen ganzzahligen Vielfachen in Σ .
- Σ ist invariant unter den Spiegelungen $\sigma_{\alpha}, \alpha \in \Sigma$.
- $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbf{Z} \quad \forall \alpha, \beta \in \Sigma$.

Dann existiert eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra mit Σ als Wurzelsystem.

(Diese ist in unserem Fall sogar einfach.) Zum Beweis siehe z. B. [Hu, §18.4]. ■

3.3 Einige Daten der einfachen komplexen Lie-Algebren

Sei \mathcal{L} eine einfache komplexe Lie-Algebra. Wir bestimmen hier die Cartan-Matrix und die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\pi)$ des zugehörigen π -Systems sowie das Wurzelsystem, die Dimension und das Funktional δ (2.23) aus dem Dynkin-Diagramm.

Cartan-Matrix Es genügt, die Einträge A_{ij} mit $i \neq j$ zu ermitteln. Bezeichne z_{ij} die Anzahl der Linien zwischen den Vertices α_i und α_j . Wir müssen die Gleichung $A_{ij}A_{ji} = z_{ij}$ lösen. Da wir $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$ und $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle$ aus dem Diagramm ablesen können, ist es sinnvoll, diese

Gleichung über den Zwischenschritt $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} z_{ij}$ ⁶ in

$$A_{ij} = -\sqrt{\frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}} z_{ij}$$

umzuformen. Diese Formel liefert die in Tabelle 3 im Anhang angegebenen Cartan-Matrizen.

Die Gruppe $\text{Aut}(\pi)$ Die Automorphismen eines π -Systems sind nach Definition die isometrischen Permutationen.⁷ Diese lassen sich direkt am Dynkin-Diagramm ablesen. Wir finden

$$\begin{aligned} (A_\ell) \quad & \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_\ell & \text{Aut}(A_\ell) &= \left\{ \mathbb{1}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \ell-1 & \\ & & & & \ell \end{pmatrix} \right\} \\ (D_\ell) \quad & \alpha_1 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{\ell-1} \text{---} \alpha_\ell & \text{Aut}(D_\ell) &= \left\{ \mathbb{1}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \ell-2 & & \\ & & & \ell-1 & \\ & & & & \ell \end{pmatrix} \right\} \text{ für } \ell > 4; \\ & & \text{Aut}(D_4) & \text{besteht aus allen Permutationen der äußeren Vertices} \\ (E_6) \quad & \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \alpha_3 \text{---} \alpha_4 \text{---} \alpha_5 & \text{Aut}(E_6) &= \left\{ \mathbb{1}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Für alle anderen irreduziblen π -Systeme ist $\text{Aut}(\pi)$ trivial. $\text{Aut}(\pi)$ hat unter anderem folgende Bedeutung: Hat man einmal eine Zuordnung der Elemente von π zu den Vertices des Dynkin-Diagrammes getroffen, dann ergeben sich alle anderen möglichen Zuordnungen durch Anwendung der Transformationen aus $\text{Aut}(\pi)$.

Wurzelsystem Die Konstruktion des zu einem gewissen π -System gehörenden Wurzelsystems erfolgt nach der im Beweis zum Rekonstruktionssatz 2.12 (a) benutzten Vorschrift. Wir führen sie am einfachsten Beispiel, A_ℓ , vor.

Wir beginnen mit $\Sigma_0^+ = \pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Die Zahlen $q_{\alpha_j, \alpha_i} = -\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$ lesen wir direkt aus der Cartan-Matrix ab. Wir erhalten $\Sigma_1^+ = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell\}$. Im nächsten Schritt bestimmen wir für die α_j -Folgen durch $\alpha_i + \alpha_{i+1}$

$$r - q = \frac{2\langle \alpha_i + \alpha_{i+1}, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = A_{ij} + A_{i+1j} = \begin{cases} 1 & j = i, i+1 \\ -1 & j = i+2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad r = \begin{cases} 1 & j = i, i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und finden $\Sigma_2^+ = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \dots, \alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell\}$. In dieser Weise fahren wir fort, wobei wir für die α_j -Folge durch eine allgemeine Wurzel $\sum_{i=1}^{\ell} n^i \alpha_i$ die Rechenregel

$$r - q = \sum_{i=1}^{\ell} n^i A_{ij}$$

verwenden können. Es ergibt sich das schon aus dem Beispiel zum Abschnitt 2.5 bekannte Resultat (2.19).


⁶die Produkte $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ sind für $i \neq j$ immer nichtpositiv

⁷Dies ist konsistent mit der Definition der Automorphismen von SEW im Abschnitt 2.5.

Wurzelgitter Die Elemente von Σ^+ kann man in einem speziellen Diagramm, dem sogenannten 'Wurzelgitter', darstellen. Die Wurzelgitter der klassischen Serien befinden sich in der Abbildung auf Seite 65.⁸ Im folgenden wollen wir erläutern, wie man für einen gegebenen Gitterpunkt herausfindet, welcher Wurzel er entspricht.

Auf waagerechten Linien liegen Wurzeln derselben Höhe (für A_ℓ haben wir dies einmal explizit darangeschrieben); die schrägen Linien kennzeichnen die 'Wege', auf denen man innerhalb von Σ^+ durch fortgesetzte Addition von einfachen Wurzeln von kleineren zu größeren Wurzeln gelangen kann. Betrachten wir zuerst die Diagramme ohne Verzweigungen (A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ). Der Übergang von einem Kreuzungspunkt A zum nächstniedrigeren B entlang einer Linie bedeutet hier Addition derjenigen einfachen Wurzel, die am oberen Ende der jeweils *anderen* Linie steht, die durch B verläuft.

Zum Beispiel entspricht der zweite Kreuzungspunkt von links in der Stufe Σ_1^+ des Wurzelgitters von A_ℓ der Wurzel $\alpha_2 + \alpha_3$; man kann ihn von α_2 aus nach rechts unten gehend durch Addition von α_3 oder von α_3 aus nach links unten gehend durch Addition von α_2 erreichen. Weiterhin kann man von $\alpha_2 + \alpha_3$ in rechter Richtung nach $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ gelangen und in linker Richtung nach $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Für Diagramme mit Verzweigungen (hier nur D_ℓ) müßte man konsequenterweise ein dreidimensionales Gitter zeichnen und entsprechende Regeln für Ebenen anstelle von Linien formulieren. Bei D_ℓ ist es jedoch einfacher, die Regeln für die außerhalb der Ebene liegenden, etwas dicker gezeichneten Wurzeln $\alpha_{\ell-1}$ und α_ℓ zu modifizieren: eine senkrecht nach unten führende Linie bedeutet Addition von $\alpha_{\ell-1}$, eine mit einem Anstieg von $-\frac{1}{2}$ nach unten führende Linie Addition von α_ℓ ; desweiteren muß man, um herauszufinden, welche Wurzel man zu addieren hat, den gesamten Teilgraphen  als *eine* Linie betrachten.

Das Funktional δ Nach Definition ist $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$. Wir entwickeln δ nach den einfachen Wurzeln: $\delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} n^i \alpha_i$. Die Koeffizienten n^i bestimmen wir aus dem Wurzelgitter, indem wir diejenigen positiven Wurzeln abzählen, in die α_i eingeht. Dazu suchen wir alle Punkte, von denen Linien ausgehen, die Addition von α_i anzeigen. Für jeden solchen Punkt ermitteln wir die Anzahl der positiven Wurzeln, die *auf* oder *unterhalb* aller dieser Linien liegen. Am Ende zählen wir alles zusammen.

Bei A_ℓ zum Beispiel gibt es nur einen Punkt, von dem zu α_i gehörige Linien ausgehen, nämlich α_i selbst. Auf bzw. unterhalb der beiden betreffenden Linien liegen $i(\ell + 1 - i)$ Wurzeln, so daß wir

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} i(\ell + 1 - i) \alpha_i \quad (3.3)$$

erhalten. Bei B_ℓ andererseits haben wir zwei solche Punkte: α_i selbst und dann noch einen am rechten Rand des Gitters. Für den ersten zählen wir $i(2(\ell - i) + 1) + \sum_{k=1}^{i-1} k$ Wurzeln, für den zweiten $\sum_{k=1}^{i-1} k$. Zusammen ergibt das

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} i(2\ell - i) \alpha_i .$$

In Tabelle 2 im Anhang findet man δ für alle einfachen komplexen Lie-Algebren.

⁸lange bzw. kurze Wurzeln sind genauso gekennzeichnet wie im Dynkin-Diagramm

Eine weitere Möglichkeit, die Entwicklungskoeffizienten n^i zu bestimmen, besteht darin, das Gleichungssystem $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} n^i A_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, \ell$, welches sich unmittelbar aus Gleichung (2.25) ergibt, zu lösen. (Die Inversen zu den Cartan-Matrizen befinden sich in Tabelle 3 im Anhang.)

Dimension Bei Kenntnis des Wurzelsystems kann man die Dimension aus der Beziehung $\dim(\mathcal{L}) = \text{rg}(\mathcal{L}) + 2 \text{ card}(\Sigma^+)$ bestimmen (siehe Tabelle 2 im Anhang). Für die exceptionellen Lie-Algebren ergibt das zum Beispiel

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} G_2 & F_4 & E_6 & E_7 & E_8 \\ \hline 14 & 52 & 78 & 133 & 248 \end{array} .$$

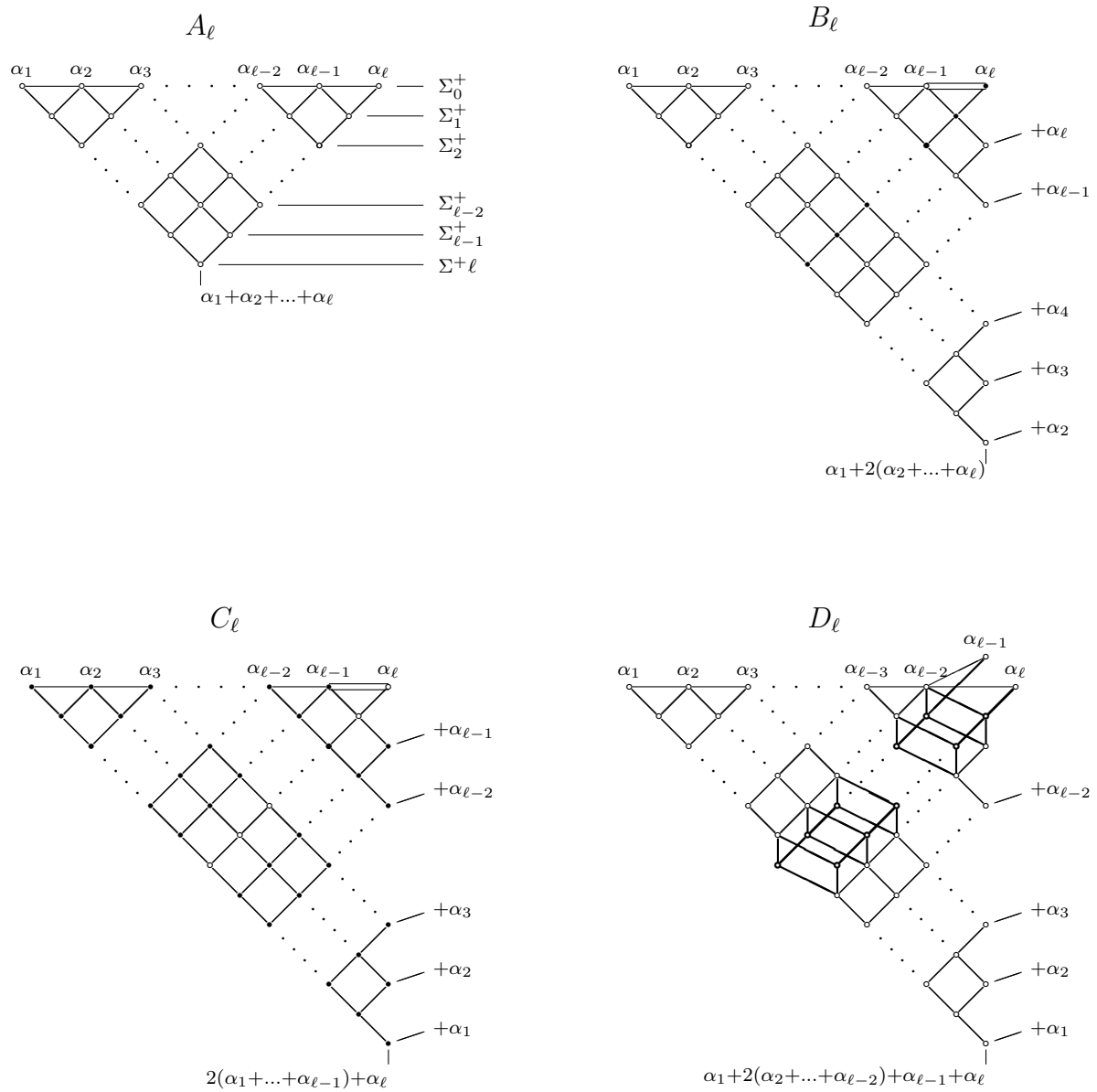


Abbildung:
Die Wurzelgitter der klassischen einfachen komplexen Lie-Algebren
 (nach [VK])

Kapitel 4

Darstellungen

Dieses Kapitel enthält die Klassifizierung der irreduziblen, fundamentalen und elementaren Darstellungen von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren sowie eine kurze Einführung in Indizes und Casimir-Operatoren.

Sei im folgenden eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra \mathcal{L} vorgegeben.

4.1 Grundlagen

Sei H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Bezeichne $\Gamma_H(f)$ das Gewichtssystem¹ von (V, f) bezüglich H . Sei π ein geordnetes SEW in Σ . Das maximale Element von $\Gamma_H(f)$ bezüglich der von π erzeugten Ordnung auf H_0^* nennen wir *höchstes Gewicht* von (V, f) und bezeichnen es mit $\Lambda_{H,\pi}(f)$ (sind keine Verwechslungen zu befürchten, lassen wir die Indizes an Γ und Λ weg).

In den folgenden beiden Lemmata listen wir einige wichtige Rechenregeln für Gewichtssysteme auf.

Lemma 4.1 *Seien (V, f) , (W, g) Darstellungen der komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} . Es gilt:*

(a) *für die duale Darstellung f^* :*

$$\Gamma(f^*) = -\Gamma(f), \quad \Lambda(f^*) = -\min \Gamma(f), \quad (V^*)_{\varrho} = (V_{-\varrho})^* \quad \forall \varrho \in H^*$$

(b) *für die direkte Summe $f \oplus g$:*

$$\Gamma(f \oplus g) = \Gamma(f) \cup \Gamma(g), \quad \Lambda(f \oplus g) = \max\{\Lambda(f), \Lambda(g)\},$$

$$(V \oplus W)_{\varrho} = V_{\varrho} \oplus W_{\varrho} \quad \forall \varrho \in H^*$$

(c) *für das Tensorprodukt $f \otimes g$:*

$$\Gamma(f \otimes g) = \{\mu + \nu : \mu \in \Gamma(f), \nu \in \Gamma(g)\}, \quad \Lambda(f \otimes g) = \Lambda(f) + \Lambda(g),$$

$$(V \otimes W)_{\varrho} = \bigoplus_{\substack{\mu \in \Gamma(f), \nu \in \Gamma(g) \\ \mu + \nu = \varrho}} V_{\mu} \otimes W_{\nu} \quad \forall \varrho \in H^*$$

(d) *für das äußere Produkt $\bigwedge^r f$:*

$$\Gamma(\bigwedge^r f) = \{n^1 \mu_1 + \dots + n^k \mu_k : \mu_i \in \Gamma(f), \mu_1 \geq \dots \geq \mu_k, \sum_i n^i = r, n^i \leq m(\mu_i) \forall i\}$$

$$(\bigwedge^r V)_{\varrho} = \bigoplus_{\substack{\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r \in \Gamma(f) \\ \mu_1 + \dots + \mu_r = \varrho}} V_{\mu_1} \wedge \dots \wedge V_{\mu_r}.$$

Das höchste Gewicht von $\bigwedge^r f$ ist die Summe der r größten Gewichte von f , wobei jedes seiner Vielfachheit entsprechend oft gezählt wird.

¹zur Definition siehe Abschnitt 2.3

BEWEIS:

zu (a): Die Zerlegung $\bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} V_\mu$ induziert eine Zerlegung $V^* = \bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} (V_\mu)^*$. Für $\eta_\mu \in (V_\mu)^*$ gilt $(f^*(h)\eta_\mu)(v) = -\eta_\mu(f(h)v_\mu) = -\mu(h)\eta_\mu(v) \quad \forall h \in H, v \in V$, d. h. $(V_\mu)^*$ ist Gewichtsunterraum zum Gewicht $-\mu$.

zu (b): Analog, mit $V \oplus W = (\bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} V_\mu) \oplus (\bigoplus_{\nu \in \Gamma(g)} W_\nu) = \bigoplus_{\varrho \in \Gamma(f) \cup \Gamma(g)} (V_\varrho \oplus W_\varrho)$ und $(f \oplus g)(h)((v_\varrho, w_\varrho)) = \varrho(h)(v_\varrho, w_\varrho)$.

zu (c): Analog, mit $V \otimes W = (\bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} V_\mu) \otimes (\bigoplus_{\nu \in \Gamma(g)} W_\nu) = \bigoplus_{\mu \in \Gamma(f), \nu \in \Gamma(g)} (V_\mu \otimes W_\nu)$ und $(f \otimes g)(h)(v_\mu \otimes w_\nu) = (\mu(h) + \nu(h))v_\mu \otimes w_\nu$.

zu (d): Analog, mit $\bigwedge^r V = \bigwedge^r \left(\bigoplus_{\mu \in \Gamma(f)} V_\mu \right) = \bigoplus_{\mu_1 \geq \dots \geq \mu_r \in \Gamma(f)} V_{\mu_1} \wedge \dots \wedge V_{\mu_r}$ und $(\bigwedge^r f(h))(v_{\mu_1} \wedge \dots \wedge v_{\mu_r}) = (\mu_1(h) + \dots + \mu_r(h))v_{\mu_1} \wedge \dots \wedge v_{\mu_r}$.

Die zusätzliche Bedingung an die Summen $\mu_1 + \dots + \mu_r$ muß man stellen, um den Fall $V_{\mu_1} \wedge \dots \wedge V_{\mu_r} = 0$ auszuschließen. ■

Lemma 4.2 Seien $\mathcal{L}', \mathcal{L}$ halbeinfache komplexe Lie-Algebren, H', H Cartan-Unteralgebren mit Wurzelsystemen Σ', Σ und SEW π', π . Sei $\phi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ eine Einbettung und (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Es gilt

- (a) $\phi^* H^* = H'^*$
- (b) $\phi^* \Gamma_H(f) = \Gamma_{H'}(f \circ \phi)^2, \quad m(\mu') = \sum_{\substack{\mu \in \Gamma_H(f) \\ \phi^* \mu = \mu'}} m(\mu) \quad \forall \mu' \in \Gamma_{H'}(f \circ \phi)$
- (c) $\phi^* H_0^* = H_0'^*$
- (d) Die geordneten SEW π in Σ und π' in Σ' (bzw. die induzierten Ordnungen auf H_0^* und $H_0'^*$) heißen verträglich bezüglich ϕ^* , falls für beliebige $\varrho, \sigma \in H_0^*$ gilt: $\varrho \geq \sigma$ impliziert $\phi^* \varrho \geq \phi^* \sigma$. In diesem Falle ist $\phi^* \Lambda_{H, \pi}(f) = \Lambda_{H', \pi'}(\phi^* f)$.

Ist ϕ sogar ein Isomorphismus, dann gilt zusätzlich

- (e) $\phi(H') = H, \quad \phi^* \Sigma = \Sigma', \quad \mathcal{L}_{\phi^* \alpha} = \phi^{-1} \mathcal{L}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Sigma$
- (f) $\phi^* \pi$ ist ein SEW in Σ' und es gilt $\phi^* \Lambda_{H, \pi}(f) = \Lambda_{H', \phi^* \pi}(f \circ \phi)$

BEWEIS:

zu (a): Wegen $\phi H' \subseteq H$ ist $\phi^* H^* \subseteq H'^*$. Aus der Injektivität von ϕ folgt Gleichheit.

zu (b): Für $\mu \in \Gamma_H(f)$ gilt $f \circ \phi(h')v_\mu = \mu(\phi(h'))v_\mu = \phi^* \mu(h')v_\mu \quad \forall h' \in H', v_\mu \in V_\mu$, d. h. $\phi^* \mu$ ist Gewicht und v_μ Gewichtsvektor der Darstellung $f \circ \phi$. Wegen $V = \bigoplus_{\mu \in \Gamma_H(f)} V_\mu$ müssen alle Gewichte von $f \circ \phi$ diese Gestalt haben. Die Addition der Vielfachheiten ist dann klar.

zu (c): Nach (b) gilt $\phi^* \Sigma \subseteq \phi^* \Gamma_H(\text{ad}_\mathcal{L}) = \Gamma_{H'}(\text{ad}_\mathcal{L} \circ \phi)$, also $\phi^* \Sigma \subseteq H_0'^*$. Daher ist $\phi^* H_0^* = \text{span}_{\mathbb{Q}} \phi^* \Sigma \subseteq H_0'^*$ (*). Aus (a) folgt aber $\text{span}_{\mathbb{C}}(\phi^* \Sigma) = H'^*$ und damit Gleichheit in (*).

zu (d): Direkt aus (b)

zu (e): $\phi(H')$ ist Cartan-Unteralgebra in \mathcal{L} . Die beiden anderen Behauptungen hatten wir uns schon im Beweis zum Satz 2.24 überlegt.

zu (f): $\phi^* \pi$ und π sind nach Konstruktion verträglich bezüglich ϕ^* . ■

4.2 Irreduzible Darstellungen

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ , $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein geordnetes SEW in Σ und $\{e_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ ein System normierter Wurzelvektoren.

Eigenschaften

Wir beginnen mit einem Lemma über die Gestalt irreduzibler Unterräume:

Lemma 4.3 *Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} und sei $v \in \bigcap_{\alpha \in \Sigma^+} \ker f(e_\alpha)$. Wir setzen $v_{i_1, \dots, i_m} := f(e_{-\alpha_{i_1}}) \dots f(e_{-\alpha_{i_m}}) v$.*

Dann ist $W_v := \text{span}\{v_{i_1, \dots, i_m} : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq \ell, m = 0, 1, 2, \dots\}$ ein irreduzibler Unterraum von V und es gilt

- (i) $f(h) v_{i_1, \dots, i_m} = (\Lambda(f) - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_m})(h) v_{i_1, \dots, i_m}$
- (ii) $f(e_{-\alpha_i}) v_{i_1, \dots, i_m} = v_{i_1, \dots, i_m, i}$
- (iii) $f(e_{\alpha_i}) v_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{i_k=i} (\Lambda(f) - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}}, \alpha_i) v_{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_m} |^3$.

Beweis: Die Formeln (i) und (ii) sowie die Invarianz und Irreduzibilität von W_v sind klar; Formel (iii) rechnet man analog zu Formel (iii) in Lemma 2.4 nach, unter Beachtung von $f(e_{\alpha_i})f(e_{-\alpha_j}) = f(e_{-\alpha_j})f(e_{-\alpha_i}) - \delta_{ij}f(h_{\alpha_i})$. ■

Aus dem Lemma folgt, daß die Vielfachheit eines Gewichtes μ einer *irreduziblen* Darstellung mit dem höchsten Gewicht Λ nach oben beschränkt ist durch die Anzahl der Möglichkeiten, μ in der Form $\Lambda - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_m}$ mit einfachen Wurzeln $\alpha_i \in \pi$ darzustellen.

Satz 4.4 *Sei \mathcal{L} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein geordnetes SEW in Σ . Sei (V, f) eine irreduzible Darstellung von \mathcal{L} . Es gilt*

- (a) $f(\mathcal{L}_\alpha)V_{\Lambda(f)} = \{0\}$, $\frac{2(\Lambda(f), \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$
- (b) $\dim(V_{\Lambda(f)}) = 1$
- (c) *Jedes $\mu \in \Gamma(f)$ kann in der Form $\mu = \Lambda(f) - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_m}$, $\alpha_{i_k} \in \pi$, geschrieben werden, wobei es eine Reihenfolge der Summanden gibt, bei der alle Partialsummen (von links beginnend) in $\Gamma(f)$ liegen.*
- (d) $\Lambda(f)$ hängt nicht von der Anordnung der Elemente von π ab.
- (e) $\Gamma(f)$ läßt sich aus $\Lambda(f)$ einschließlich aller Vielfachheiten rekonstruieren.
- (f) $\sum_{\mu \in \Gamma(f)} m(\mu) \cdot \mu = 0$

BEWEIS: Wir verwenden die Abkürzung $\Lambda = \Lambda(f)$.

zu (a): Für $\alpha \in \Sigma^+$ gilt $\Lambda + \alpha > \Lambda$ und damit $\Lambda + \alpha \notin \Gamma(f)$. Der erste Teil der Behauptung folgt dann aus Gleichung (2.8), der zweite aus Satz 2.6.

zu (b): Nach Lemma 4.3 würden linear unabhängige Vektoren aus V_Λ verschiedene irreduzible Unterräume erzeugen.

zu (c): Dies folgt direkt aus Lemma 4.3.

zu (d): In jeder Anordnung von π sind die Elemente α_i positiv, so daß für beliebige $n^i \in \mathbb{N}$ $\Lambda \geq \Lambda - \sum_{i=1}^\ell n^i \alpha_i$ gilt.

zu (e): (Analog der Rekonstruktion des Wurzelsystems aus einem SEW im Beweis zum Satz 2.12) Wir beginnen mit $\Gamma_0 := \{\Lambda\}$. Im ersten Schritt bestimmen wir $r_{\Lambda, \alpha_i} = \frac{2(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ für alle $\alpha_i \in \pi$ und bilden $\Gamma_1 := \{\Lambda - \alpha_i : \alpha_i \in \pi, r_{\Lambda, \alpha_i} \neq 0\}$. Dann berechnen wir

für die α_i -Folgen durch $\mu \in \Gamma_1$ die Zahlen $r_{\mu, \alpha_i} = \frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} + q_{\mu, \alpha_i}$, $\alpha_i \in \pi$ und bilden $\Gamma_2 := \{\mu - \alpha_i : \mu \in \Gamma_1, \alpha_i \in \pi, r_{\mu, \alpha_i} \neq 0\}$. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir eine Menge $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$ von Funktionalen aus H_0^* , die nach (c) und Satz 2.6 mit $\Gamma(f)$ übereinstimmt.

Die Vielfachheit $m(\mu)$ eines Gewichtes μ bestimmt man rekursiv aus $m(\Lambda) = 1$, indem man die *Multiplizitätsformel von Freudenthal* anwendet:⁴

$$m(\mu) \left((\Lambda + \delta, \Lambda + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta) \right) = 2 \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \sum_{k=1}^{\infty} m(\mu + k\alpha) (\mu + k\alpha, \alpha) \quad (4.1)$$

(das Skalarprodukt in der Formel ist durch die Killing-Form induziert; im Falle einer einfachen Lie-Algebra kann man es natürlich durch das kanonisch normierte ersetzen).

zu (f): Dies folgt aus

$$0 = \text{tr}_V([f(e_\alpha)], f(e_{-\alpha})) = \text{tr} f(h_\alpha) = \sum_{\mu \in \Gamma(f)} m(\mu) (\mu, \alpha) \quad \forall \alpha \in \Sigma. \quad \blacksquare$$

Mit dem höchsten Gewicht besitzen wir ein einfaches Kriterium für die Äquivalenz irreduzibler Darstellungen:

Satz 4.5 *Zwei irreduzible Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra sind genau dann äquivalent, wenn ihre höchsten Gewichte (bezüglich ein und derselben Cartan-Unteralgebra und ein und desselben SEW) übereinstimmen.*

BEWEIS:

(\Rightarrow) Sei $\phi : V \rightarrow W$ ein bijektiver Verflechtungsoperator. Für $\mu \in \Gamma(f)$ und $v_\mu \in V_\mu$ berechnen wir $g(h) \circ \phi v_\mu = \phi \circ f(h) v_\mu = \mu(h) \phi v_\mu \quad \forall h \in H$. Damit ist $\mu \in \Gamma(g)$ und $W_\mu = \phi V_\mu$. Aus der Bijektivität von ϕ folgt $\Gamma(f) = \Gamma(g)$, wobei auch die Vielfachheiten übereinstimmen. Insbesondere gilt $\Lambda(g) = \Lambda(f)$.

(\Leftarrow) Seien (V, f) und (W, g) irreduzible Darstellungen von \mathcal{L} mit dem gemeinsamen höchsten Gewicht Λ . Wir bilden die direkte Summe $(V \oplus W, f \oplus g)$. Seien $v_\Lambda \in V_\Lambda$ und $w_\Lambda \in W_\Lambda$ gewählt. Nach Lemma 4.1 (b) ist das Paar (v_Λ, w_Λ) Gewichtsvektor zum Gewicht $\Lambda \in \Gamma(f \oplus g)$ und erfüllt $(f \oplus g)(e_\alpha)(v_\Lambda, w_\Lambda) = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$. Nach Lemma 4.3 erzeugt (v_Λ, w_Λ) damit einen irreduziblen Unterraum $Y \subseteq V \oplus W$. Betrachten wir die natürlichen Projektionen $p_V : V \oplus W \rightarrow V$ und $p_W : V \oplus W \rightarrow W$. Die Einschränkungen $p_V|_Y$ und $p_W|_Y$ sind Morphismen irreduzibler Darstellungen, nach Lemma von Schur (Satz 1.1) also entweder 0 oder Isomorphismen. Wegen $p_V(v_\Lambda, w_\Lambda) = v_\Lambda$ und $p_W(v_\Lambda, w_\Lambda) = w_\Lambda$ kommt 0 aber nicht in Frage. \blacksquare

Der Satz von Weyl

Satz 4.6 (Hermann Weyl) *Jede endlichdimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra ist vollständig reduzibel. Die irreduziblen Komponenten sind bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: (Analog zu Lemma 2.4) Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Der Unterraum $\bigcap_{\alpha \in \Sigma^+} \ker(e_\alpha)$ ist invariant unter $f(H)$ und besitzt daher eine Basis $\{v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_r}\}$ aus

⁴zum Beweis siehe z. B. [Hu, §22.3]

Wurzelvektoren von (V, f) . Jedes v_{μ_i} erzeugt einen irreduziblen Unterraum V_i mit höchstem Gewicht μ_i (Lemma 4.3). Zum Schluß prüfen wir $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$.

Durch die Wahl einer geeigneten Basis aus Gewichtsvektoren in N erhält man auf diese Weise jede mögliche Zerlegung von (V, f) in irreduzible Darstellungen. Je zwei Basen in N bestehen aber aus Gewichtsvektoren zu denselben Gewichten. Damit folgt die Eindeutigkeit (modulo Äquivalenz) aus Satz 4.5. ■

Die Gewichtssysteme der irreduziblen Komponenten von (V, f) erhält man auf die folgende Weise direkt aus dem Gewichtssystem $\Gamma(f)$: Man erstellt eine Liste der Elemente $\mu \in \Gamma(f)$, in der jedes Gewicht seiner Vielfachheit entsprechend oft enthalten ist. Ausgehend vom höchsten Gewicht $\Lambda(f)$ rekonstruiert man mit Hilfe des Algorithmus im Beweis zu Satz 4.4 (e) eine Menge Γ_1 von Gewichten $\mu \in \Gamma(f)$ mitsamt Vielfachheiten $m_1(\mu)$. Von jedem $\mu \in \Gamma_1$ entfernt man $m_1(\mu)$ Vertreter aus der Liste und bestimmt von den verbleibenden Gewichten das höchste. Diese Prozedur iteriert man, bis die Liste leer ist. Die Γ_i sind dann die Gewichtssysteme der irreduziblen Komponenten.

Satz 4.7 *Zwei Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} sind genau dann äquivalent, wenn ihre Gewichtssysteme (bezüglich ein und derselben Cartan-Unter-algebra) einschließlich der Vielfachheiten übereinstimmen.*

BEWEIS:

(\Rightarrow) Dies hatten wir uns schon im Beweis zum Satz 4.5 überlegt.

(\Leftarrow) Nach Satz 4.6 können beide Darstellungen vollständig in irreduzible Komponenten zerlegt werden, wobei sich die Gewichtssysteme der Komponenten aus obiger Bemerkung ergeben. Die Behauptung folgt dann aus Satz 4.5. ■

Bei den meisten Fragestellungen ist es völlig ausreichend (und effektiver), Äquivalenzklassen anstelle der konkreten Darstellungen zu betrachten. Dann kann man auf dem Niveau der Gewichtssysteme arbeiten.

Klassifizierung

Nach Satz 4.5 genügt es, die irreduziblen Darstellungen zu klassifizieren.

Satz 4.8 *Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra vom Rang ℓ , H eine Cartan-Unter-algebra mit Wurzelsystem Σ und $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein geordnetes SEW in Σ . Die Äquivalenzklassen endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen von \mathcal{L} stehen in 1 : 1-Beziehung zu Folgen $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$. Dabei wird der Klasse $[f]$ die Zahlenfolge*

$$\Lambda_i(f) := \frac{2(\Lambda(f), \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

zugeordnet. Umgekehrt entspricht der Folge $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ die Klasse der irreduziblen Darstellungen mit dem höchsten Gewicht $\Lambda := \sum_{i=1}^{\ell} n^i \alpha_i$, wobei (n^1, \dots, n^ℓ) Lösung des Gleichungssystems $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{\ell} n^j A_{ji}$ $i = 1, \dots, \ell$ ist.

BEWEIS: Sei (V, f) eine irreduzible Darstellung von \mathcal{L} . Nach Satz 2.6 ist $\Lambda_j(f)$ ganzzahlig, nach Satz 4.4 (a) gilt $\Lambda_j(f) \geq 0$. Den Übergang zu Äquivalenzklassen schließlich liefert Satz 4.5.

Sei umgekehrt eine Folge $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ gegeben und sei Λ das im Satz definierte Funktional. Angenommen, es gibt eine irreduzible Darstellung f mit $\Lambda(f) = \Lambda$, dann besitzt diese die charakteristische Folge $\Lambda_j(f) = \frac{2(\Lambda, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_i n^i A_{ij} = \Lambda_j$. Es bleibt also zu zeigen, daß f existiert. Dies erfordert jedoch Begriffe, die uns hier nicht zur Verfügung stehen. Wir zitieren daher

Lemma 4.9 *Zu jedem $\Lambda \in H^*$, das die Bedingung*

$$\frac{2(\Lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geq 0 \text{ und ganzzahlig,} \quad i = 1, \dots, \ell$$

erfüllt, gibt es eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung (V, f) von \mathcal{L} mit Λ als höchstem Gewicht.

Zum Beweis siehe z. B. [Hu], §20.3 (Existenz) und §21 (endliche Dimension). ■

BEMERKUNGEN:

1. Sei $\phi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Sind zwei Darstellungen f, g von \mathcal{L} äquivalent, so sind auch die Darstellungen $f \circ \phi$ und $g \circ \phi$ von \mathcal{L}' äquivalent. Damit klassifiziert \mathbb{N}^ℓ die irreduziblen Darstellungen jeder zu \mathcal{L} isomorphen Lie-Algebra. In diesem Sinne können wir von Klassen von Darstellungen einer Klasse von Lie-Algebren sprechen.

2. Zur Abhängigkeit der Klassifizierung von H und π : Sei (V, f) eine irreduzible Darstellung. Seien H, H' Cartan-Unteralgebren und π, π' geordnete SEW in den entsprechenden Wurzelsystemen. Nach Satz 2.25 gibt es einen inneren Automorphismus U mit $H = UH'$ und $\pi' = U^*\pi$. Die Anordnung der Elemente von π' und $U^*\pi$ kann sich zwar noch unterscheiden, das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung ist aber davon unabhängig (Satz 4.4 (c)), d. h. es gilt $\Lambda_{H', \pi'}(f) = \Lambda_{H', U^*\pi}(f)$. Lemma 4.2 (f) liefert dann $\Lambda_{H', \pi'}(f) = U^*\Lambda_{H, \pi}(f)$. Wegen der Isometrie von U^* wird der Darstellung (V, f) also durch H, π dieselbe Menge von Zahlen zugeordnet wie durch H', π' . Die Reihenfolge der Zahlen kann allerdings verschieden sein.

Beispiele

Darstellung von A_ℓ als $sl(\ell + 1, \mathbb{C})$ Es ist klar, daß die durch lineare Operatoren gegebene Lie-Algebra $sl(\ell + 1, \mathbb{C})$ eine irreduzible Darstellung der 'abstrakten' Algebra A_ℓ ist. Um rechnen zu können, wählen wir einen Repräsentanten von A_ℓ , und zwar $sl(\ell + 1, \mathbb{C})$ selbst. Dann ist die zu untersuchende Darstellung die identische Abbildung von $sl(\ell + 1, \mathbb{C})$. Wir verwenden wieder die Cartan-Unteralgebra der spurfreien Diagonalmatrizen und das geordnete System einfacher Wurzeln $\pi = \{\alpha_i : i = 1, \dots, \ell\}$ mit $\alpha_i = E^{(ii)} - E^{(i+1 i+1)}$ aus den Beispielen zu den Abschnitten 2.4 und 2.5. Bezeichne $e_{(i)}$ die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{C}^{\ell+1}$. Die Gewichtsunterräume sind

$$\mathbb{C}e_{(i)} \text{ zu den Gewichten } E^{(ii)}, \quad i = 1, \dots, \ell + 1.$$

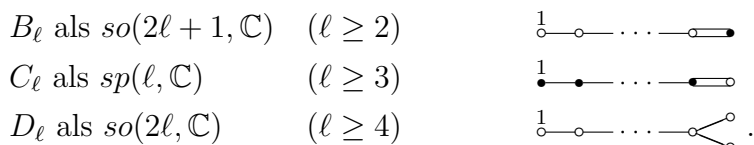
Für $i \geq 2$ gilt $E^{(ii)} = E^{(i-1 i-1)} - \alpha_{i-1}$. Das höchste Gewicht ist daher $E^{(11)}$. Wir entwickeln es nach der Basis π : Mit Hilfe der Beziehung $E^{(\ell+1 \ell+1)}|_{sl(\ell+1, \mathbb{C})} = -\sum_{j=1}^{\ell} E^{(jj)}|_{sl(\ell+1, \mathbb{C})}$ ergibt sich $E^{(11)} = \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} j \alpha_j$. Unter Verwendung der Formel (2.13) erhalten wir für

die klassifizierende Folge $\Lambda_j(\text{id}) = \langle E^{(11)}, \alpha_j \rangle = \delta_{1j}$. Wir schreiben diese in der häufig benutzten Diagrammform:



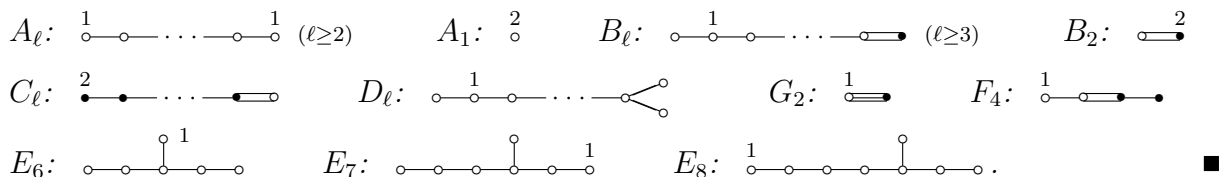
(Nullen werden üblicherweise weggelassen.) Man beachte, daß diese Schreibweise von der Zuordnung der einfachen Wurzeln zu den Vertices des Dynkin-Diagrammes abhängt, die man gewählt hat (vgl. die Bemerkungen zur Gruppe $\text{Aut}(\pi)$ im Abschnitt 3.3). In unserem Beispiel erhält man mit der anderen möglichen Zuordnung $\circ - \circ - \dots - \circ - \overset{1}{\circ}$.

Unter Verwendung der Cartan-Unteralgebren und SEW aus dem Beweis zum Satz 3.6 ergibt sich analog für die Darstellung von



Adjungierte Darstellung Die adjungierte Darstellung einer einfachen Lie-Algebra ist nach Satz 1.2 irreduzibel. Das höchste Gewicht, d. h. die größte Wurzel können wir dem Wurzelgitter (S. 65) oder der Tabelle 2 im Anhang entnehmen. So erhalten wir

Satz 4.10 Die adjungierten Darstellungen der einfachen komplexen Lie-Algebren gehören zu den folgenden Klassen:



In den Beispielen zum folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß sich die Zahlenfolgen der adjungierten Darstellungen von A_1 bzw. B_2 durch Extrapolation aus der von A_ℓ bzw. B_ℓ ergeben, obwohl letztere nur mit der von C_ℓ und nicht mit der von B_ℓ kompatibel zu sein scheint.

Wir weisen darauf hin, daß die adjungierte Darstellung einer halbeinfachen, nichteinfachen Lie-Algebra *reduzibel* ist und folglich nicht durch eine, sondern mehrere Zahlenfolgen charakterisiert wird. Die adjungierte Darstellung von $A_1 \oplus A_1$ zum Beispiel gehört zur Klasse



Irreduzible Darstellungen von A_1 Das Wurzelsystem ist $\Sigma = \{\alpha, -\alpha\}$. Wir wählen $\{\alpha\}$ als SEW. Für eine irreduzible Darstellung (V, f) definieren wir die *Spinquantenzahl* $s(f) := \frac{1}{2} \langle \Lambda(f), \alpha \rangle$. Satz 4.8 zufolge werden die irreduziblen Darstellungen von A_1 durch beliebige halbzahlige Werte von s klassifiziert. Das höchste Gewicht einer Darstellung f mit $\text{Spin } s(f) = s$ ist $\Lambda(f) = s\alpha$. Daraus rekonstruiert man auf die übliche Weise (vgl. Satz 4.4 (e)) das Gewichtssystem $\{(s - j)\alpha : j = 0, \dots, 2s\}$. Da alle Gewichte Vielfachheit 1 haben, hat die Darstellung die Dimension $2s + 1$.

4.3 Fundamentale und elementare Darstellungen

Zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir im folgenden unter dem Begriff "Darstellung" immer eine Äquivalenzklasse von Darstellungen verstehen.

Satz 4.6 können wir auch so interpretieren, daß die irreduziblen Darstellungen bezüglich der Operation \oplus ein Erzeugendensystem für die Menge aller Darstellungen bilden. In diesem Abschnitt wollen wir dieses Erzeugendensystem durch Hinzunahme zusätzlicher Operationen weiter reduzieren. Günstigerweise werden wir Operationen wählen, die irreduzible Darstellungen wieder in irreduzible Darstellungen überführen.

Seien f, g irreduzible Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} . Wir definieren $f \tilde{\otimes} g$ als die zum höchsten Gewicht gehörende irreduzible Komponente von $f \otimes g$. Entsprechend definieren wir $\tilde{\bigwedge}^r f$ ⁵.

Ein (minimales) Erzeugendensystem für die Menge der irreduziblen Darstellungen bezüglich der Operation $\tilde{\otimes}$ bzw. bezüglich der Operationen $\tilde{\otimes}$ und $\tilde{\bigwedge}^r$ nennen wir *System fundamentaler bzw. elementarer Darstellungen* ⁶.

Fundamentale Darstellungen

Fundamentale Darstellungen findet man ganz einfach:

Satz 4.11 *Für eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra \mathcal{L} gibt es genau ein System fundamentaler Darstellungen, nämlich $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.*

BEWEIS: Nach Lemma 4.1 (c) gilt $\Lambda_i(f \tilde{\otimes} g) = \Lambda_i(f \otimes g) = \Lambda_i(f) + \Lambda_i(g)$. Damit erzeugen die angegebenen Darstellungen wirklich alle irreduziblen durch $\tilde{\otimes}$ -Produkte. Andererseits kann keine von ihnen selbst als $\tilde{\otimes}$ -Produkt geschrieben werden. ■

Die fundamentalen Darstellungen der unendlichen Serien erhalten eigene Namen: ⁷

$$\begin{aligned}
 A_\ell: \quad \pi_k &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \overset{1}{\circ_{\alpha_k}} \cdots \circ_{\alpha_\ell} \\
 B_\ell: \quad \tau_k &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \overset{1}{\circ_{\alpha_k}} \cdots \overset{\bullet}{\circ_{\alpha_{\ell-1}}} \rightarrow \alpha_\ell \quad (k \leq \ell-1), & \sigma &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \overset{\bullet}{\circ_{\alpha_{\ell-1}}} \rightarrow \overset{1}{\alpha_\ell} \\
 C_\ell: \quad \varrho_k &:= \bullet_{\alpha_1} \cdots \overset{1}{\circ_{\alpha_k}} \cdots \overset{\bullet}{\circ_{\alpha_{\ell-1}}} \rightarrow \alpha_\ell \\
 D_\ell: \quad \tau_k &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \overset{1}{\circ_{\alpha_k}} \cdots \begin{array}{l} \circ_{\alpha_{\ell-1}} \\ \circ_{\alpha_\ell} \end{array} \quad (k \leq \ell-2), \\
 \sigma_1 &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \begin{array}{l} \overset{1}{\circ_{\alpha_{\ell-1}}} \\ \circ_{\alpha_\ell} \end{array} \\
 \sigma_2 &:= \circ_{\alpha_1} \cdots \begin{array}{l} \overset{1}{\circ_{\alpha_{\ell-1}}} \\ \circ_{\alpha_\ell} \end{array}
 \end{aligned}$$

Unabhängig davon bezeichne f_k bei einer beliebigen halbeinfachen Lie-Algebra die fundamentale Darstellung mit der klassifizierenden Zahlenfolge $\Lambda_i(f_k) = \delta_{ik}$. Für die exceptionellen Lie-Algebren verwenden wir dabei die folgenden Numerierungen der Vertices:

$$G_2: \begin{array}{c} \circ_{\alpha_1} \\ \parallel \\ \circ_{\alpha_2} \end{array}, \quad F_4: \circ_{\alpha_1} \rightarrow \overset{\bullet}{\circ_{\alpha_2}} \rightarrow \bullet_{\alpha_3} \rightarrow \bullet_{\alpha_4}, \quad E_6, E_7, E_8: \circ_{\alpha_1} \cdots \overset{\alpha_\ell}{\circ_{\alpha_{\ell-3}}} \rightarrow \circ_{\alpha_{\ell-1}}. \quad (4.2)$$

⁵Man beachte, daß diese Operationen wirklich nur für Klassen von Darstellungen sinnvoll sind
⁶Terminologie nach Dynkin; manche andere Autoren verwenden diese Bezeichnungen genau umgekehrt
⁷ebenfalls nach Dynkin

Elementare Darstellungen

Die elementaren Darstellungen lassen sich nicht in so allgemeiner Form wie die fundamentalen angeben, wir müssen jede Lie-Algebra einzeln untersuchen. Betrachten wir zuerst die einfachen Lie-Algebren:

Satz 4.12

Die einfachen komplexen Lie-Algebren besitzen folgende Systeme elementarer Darstellungen:

Typ	System	Erzeugung der fundamentalen Darstellungen durch
A_ℓ	$\{\pi_1\}$	$\pi_k = \tilde{\Lambda}^k \pi_1$
	$\{\pi_\ell\}$	$\pi_k = \tilde{\Lambda}^{\ell-k+1} \pi_\ell$
B_2	$\{\sigma\}$	$\tau_1 = \tilde{\Lambda}^2 \sigma$
$B_\ell (\ell \geq 3)$	$\{\tau_1, \sigma\}$	$\tau_k = \tilde{\Lambda}^k \tau_1 \quad (k < \ell), \quad \tau_{\ell-1} = \tilde{\Lambda}^2 \sigma$
$C_\ell (\ell \geq 3)$	$\{\varrho_1\}$	$\varrho_k = \tilde{\Lambda}^k \varrho_1$
$D_\ell (\ell \geq 4)$	$\{\tau_1, \sigma_1, \sigma_2\}$	$\tau_k = \tilde{\Lambda}^k \tau_1 \quad (k < \ell-1), \quad \tau_{\ell-2} = \tilde{\Lambda}^2 \sigma_1 = \tilde{\Lambda}^2 \sigma_2$
G_2	$\{f_2\}$	$f_1 = \tilde{\Lambda}^2 f_2$
F_4	$\{f_1, f_4\}$	$f_2 = \tilde{\Lambda}^2 f_1, \quad f_3 = \tilde{\Lambda}^3 f_1 = \tilde{\Lambda}^2 f_4$
E_6, E_7, E_8	$\{f_1, f_{\ell-1}, f_\ell\}$	$f_j = \tilde{\Lambda}^j f_1 \quad (j \leq \ell-3), \quad f_j = \tilde{\Lambda}^{\ell-j} f_{\ell-1} \quad (j \geq \ell-3), \quad f_{\ell-3} = \tilde{\Lambda}^2 f_\ell$

BEMERKUNG: Bei den mit * versehenen Gleichungen kann man $\tilde{\Lambda}^k$ durch Λ^k ersetzen, d. h. diese Produkte sind schon irreduzibel.

BEWEIS: Es genügt, solche Systeme zu betrachten, aus denen die fundamentalen Darstellungen durch $\tilde{\Lambda}^r$ -Produkte erzeugt werden können. Wir beginnen mit A_ℓ .

Behauptung: Für A_ℓ gilt $\pi_j = \tilde{\Lambda}^j \pi_1$

Wir vergleichen die höchsten Gewichte. Nach Lemma 4.1 (d) ist $\Lambda(\tilde{\Lambda}^j \pi_1)$ gleich der Summe der j größten Gewichte von $\Gamma(\pi_1)$ (gezählt entsprechend ihrer Vielfachheit). Bestimmen wir also $\Gamma(\pi_1)$ mit Hilfe des Algorithmus aus dem Beweis zu Satz 4.4 (e): Wir beginnen mit $\Gamma_0 = \{\Lambda(\pi_1)\}$. Dann berechnen wir für die α_i -Folgen durch $\Lambda(\pi_1)$

$$r_i = \frac{2(\Lambda(\pi_1), \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{i1}.$$

Damit ist nur die α_1 -Folge nach unten fortsetzbar und es ergibt sich $\Gamma_1 = \{\Lambda(\pi_1) - \alpha_1\}$. Als nächstes bestimmen wir für die α_i -Folgen durch $\Lambda(\pi_1) - \alpha_1$

$$r_i - q_i = \frac{2(\Lambda(\pi_1) - \alpha_1, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \begin{cases} -1 & i=1 \\ 1 & i=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad q_i = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und finden, daß sich nur die α_2 -Folge nach unten fortsetzen läßt. Auf diese Weise fahren wir fort, wobei wir die Zahl r_i für die α_i -Folge durch das Gewicht $\Lambda(\pi_1) - \sum_{j=1}^{\ell} m^j \alpha_j$ mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$r_i - q_i = \Lambda_i(\pi_1) - \sum_{j=1}^{\ell} m^j A_{ji} \quad |^8 \quad (4.3)$$

⁸Die Formel gilt offensichtlich für beliebige Darstellungen

ausrechnen können (q_i ist ja aus den vorangegangenen Schritten bekannt). Wir erhalten

$$\Gamma(\pi_1) = \{\Lambda(\pi_1), \Lambda(\pi_1) - \alpha_1, \Lambda(\pi_1) - \alpha_1 - \alpha_2, \dots, \Lambda(\pi_1) - \alpha_1 - \dots - \alpha_\ell\}. \quad (4.4)$$

Um die Berechnung der Vielfachheiten mit Hilfe der Multiplizitätsformel (4.1) zu umgehen, erinnern wir uns, daß die Darstellung von A_ℓ als $sl(\ell + 1, \mathbb{C})$ zur Klasse π_1 gehört. Damit ist $\dim(\pi_1) = \ell + 1$. Da wir auch $\ell + 1$ Gewichte gefunden haben, kann jedes davon nur die Vielfachheit 1 haben. Es folgt

$$\Lambda(\tilde{\bigwedge}^j \pi_1) = j\Lambda(\pi_1) - (j - 1)\alpha_1 - \dots - \alpha_{j-1}. \quad (4.5)$$

Nun berechnen wir die klassifizierende Zahlenfolge:

$$\Lambda_i(\tilde{\bigwedge}^j \pi_1) = \frac{2 \left(\Lambda(\tilde{\bigwedge}^j \pi_1), \alpha_i \right)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = j \delta_{1i} - (j - 1)A_{1i} - \dots - A_{(j-1)i} = \delta_{ij} = \Lambda_i(\pi_j).$$

Damit lassen sich alle fundamentalen Darstellungen von A_ℓ durch äußere Produkte aus π_1 bzw. π_ℓ ⁹ erzeugen. Allgemeiner gilt: beginnt ein Diagramm mit einer homogene Folge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$, so gilt $f_i = \tilde{\bigwedge}^i f_1$ für alle $i \leq j$.

Aus dieser Tatsache sowie aus den folgenden Spezialfällen, zu deren Berechnung man die Cartan-Matrizen aus Tabelle 3 und Formel (4.3) heranziehen kann, lassen sich die Systeme elementarer Darstellungen für die restlichen Typen ableiten.

$$\begin{array}{ll} \tilde{\bigwedge}^\ell \begin{array}{c} 1 \\ \circ \dots \circ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \circ \dots \circ \bullet \end{array} & \text{(fundamentale Darstellung)} \\ \tilde{\bigwedge}^\ell \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \dots \circ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \dots \circ \bullet \end{array} & \text{(fundamentale Darstellung)} \\ \tilde{\bigwedge}^3 \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \circ \circ \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \bullet \circ \circ \end{array} & \text{(keine fundamentale Darstellung)} \\ \tilde{\bigwedge}^{k+1} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \dots \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad \alpha_k \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \circ \dots \circ \circ \circ \circ \\ \quad \quad \quad \circ \\ \quad \quad \quad 1 \end{array} & \text{(keine fundamentale Darstellung)} \\ \tilde{\bigwedge}^2 \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \bullet \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \bullet \end{array} & \text{(fundamentale Darstellung)} \\ \tilde{\bigwedge}^2 \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \bullet \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \bullet \end{array} & \text{(keine fundamentale Darstellung).} \quad \blacksquare \end{array}$$

Für allgemeine halbeinfache Lie-Algebren gilt schließlich

Satz 4.13 *Ein System elementarer Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} ist durch die Vereinigung von Systemen elementarer Darstellungen der einfachen Summanden gegeben¹⁰. \mathcal{L} besitzt 2^n verschiedene Systeme elementarer Darstellungen, wobei n die Anzahl der Summanden ist, die der A-Serie angehören und deren Rang größer als 1 ist.* ■

Beispiele

Einige Daten der fundamentalen Darstellungen der einfachen komplexen Lie-Algebren Hier leiten wir die Eigenschaften der jeweiligen Darstellung, wie Dimension, Gewichtssystem, höchstes Gewicht, aus der klassifizierenden Zahlenfolge ab. Das ist gewissermaßen die Umkehrung der Beispiele zum Abschnitt 4.2, wo wir konkrete Darstellungen vorliegen hatten und deren Klasse ermittelt haben.

⁹aus Symmetriegründen völlig analog

¹⁰man macht dabei eine Darstellung eines Summanden zu einer Darstellung von \mathcal{L} , indem man sie mit Null auf die anderen Summanden fortsetzt

Wir betrachten noch einmal die elementare Darstellung π_1 von A_ℓ . Gewichtssystem, Vielfachheiten und Dimension hatten wir schon im Beweis zum Satz 4.12 berechnet (Gleichung (4.4)). Wir wollen nun $\Lambda(\pi_1)$ als Linearkombination einfacher Wurzeln aufschreiben. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Zum einen können wir die Entwicklungskoeffizienten n^i von $\Lambda(\pi_1)$ bezüglich der Basis der einfachen Wurzeln aus der Gleichung $\Lambda_j(\pi) = \sum_i n^i A_{ij}$ berechnen. Die inverse Cartan-Matrix A_{ij} entnehmen wir dabei der Tabelle 3 im Anhang. Zum anderen können wir Satz 4.4 (f) anwenden und $\sum_{\mu \in \Gamma(\pi_1)} \mu = (\ell + 1) \Lambda(\pi_1) - \sum_{j=1}^{\ell} (\ell + 1 - j) \alpha_j = 0$ nach $\Lambda(\pi_1)$ umstellen. Es ergibt sich

$$\Lambda(\pi_1) = \frac{1}{\ell + 1} \sum_{j=1}^{\ell} (\ell + 1 - j) \alpha_j. \quad (4.6)$$

Die Gewichtssysteme der anderen fundamentalen Darstellungen $\pi_j = \tilde{\wedge}^j \pi_1$ von A_ℓ kann man ebenfalls mit Hilfe des Rekonstruktionsalgorithmus ermitteln. Einfacher ist es jedoch, Lemma 4.1 anzuwenden und $\Gamma(\pi_j)$ aus $\Gamma(\pi_1)$ zu berechnen. Das höchste Gewicht $\Lambda(\pi_j)$ hatten wir auf diese Weise schon im Beweis zum Satz 4.12 bestimmt (Gleichung (4.5)). Wir schreiben es als Linearkombination einfacher Wurzeln:

$$\Lambda(\pi_j) = \frac{1}{\ell + 1} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i (\ell + 1 - j) \alpha_i + j \sum_{i=j}^{\ell} (\ell + 1 - i) \alpha_i \right).$$

Da die Gewichte von π_1 sämtlich Vielfachheit 1 haben, ist

$$\Gamma(\pi_j) = \{ \mu_1 + \dots + \mu_j : \mu_1, \dots, \mu_j \in \Gamma(\pi_1), \mu_1 > \dots > \mu_j \}.$$

Bei der Berechnung der Dimension von π_j benutzen wir, daß $\tilde{\wedge}^j \pi_1$ schon irreduzibel ist und finden

$$\dim(\pi_j) = \binom{\ell + 1}{j}.$$

Im Abschnitt 4.4 werden wir eine Formel angeben, mit deren Hilfe man die Dimension einer Darstellung aus dem Gewichtssystem berechnen kann.

Bei π_ℓ schließlich können wir den Automorphismus $\alpha_j \mapsto \alpha_{\ell+1-j}$ benutzen, um aus $\Gamma(\pi_1)$ sofort $\Gamma(\pi_\ell) = \{ \Lambda(\pi_\ell), \Lambda(\pi_\ell) - \alpha_\ell, \Lambda(\pi_\ell) - \alpha_\ell - \alpha_{\ell-1}, \dots, \Lambda(\pi_\ell) - \alpha_\ell - \dots - \alpha_1 \}$ sowie $\Lambda(\pi_\ell) = \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} j \alpha_j$ zu erhalten. Wegen $\Lambda(\pi_1) - \alpha_1 - \dots - \alpha_\ell = -\frac{1}{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} j \alpha_j$ ist $-\Lambda(\pi_\ell)$ das kleinste Gewicht von π_1 . Nach Lemma 4.1 ist π_ℓ damit dual zu π_1 . Insbesondere gilt $\dim(\pi_\ell) = \dim(\pi_1) = \ell + 1$.

(ÜA) Berechnung von Gewichtssystem und höchstem Gewicht der fundamentalen Darstellungen der anderen unendlichen Serien (zur Kontrolle findet man das höchste Gewicht auch in Tabelle 4 im Anhang).

Zerlegung der adjungierten Darstellungen in fundamentale Darstellungen

Aus Satz 4.10 folgt für

A_ℓ : $\text{ad}_{A_\ell} = \pi_1 \tilde{\otimes} \pi_\ell$. Wegen $\dim(\pi_1 \otimes \pi_\ell) = (\ell + 1)^2$ und $\dim(\text{ad}_{A_\ell}) = (\ell + 1)^2 - 1$ enthält $\pi_1 \otimes \pi_\ell$ außer ad_{A_ℓ} noch eine eindimensionale und damit triviale Darstellung $\underline{1}$, d. h. die Zerlegung in irreduzible Komponenten ist

$$\pi_1 \otimes \pi_\ell = \text{ad}_{A_\ell} \oplus \underline{1}.$$

(Dies alles ist auch für $\ell = 1$ richtig; dann ist $\pi_1 = \pi_\ell$.)

B_ℓ : $\text{ad}_{B_\ell} = \tau_1 \tilde{\wedge} \tau_1$. Für $\ell \geq 3$ gilt sogar $\text{ad}_{B_\ell} = \tau_1 \wedge \tau_1 = \tau_2$ ($\tau_1 \wedge \tau_1$ ist dann irreduzibel).

C_ℓ : $\text{ad}_{C_\ell} = \varrho_1 \tilde{\otimes} \varrho_1$. (Bemerkung: Die irreduzible Komponente des höchsten Gewichtes einer Darstellung der Form $f \otimes f$ erhält man stets durch Symmetrisierung.)

D_ℓ : $\text{ad}_{D_\ell} = \tau_2 = \tau_1 \wedge \tau_1$.

4.4 Zur Struktur von Darstellungen

Sei \mathcal{L} in diesem Abschnitt eine *einfache* Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ ein SEW in Σ .

Index

Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Nach Satz 3.5 ist die zugehörige Spurform B_f (1.5) proportional zur kanonisch normierten ISBLF. Der Proportionalitätsfaktor heißt *Index* der Darstellung (V, f) und wird mit $\text{ind}(f)$ bezeichnet:

$$B_f(x, y) = \text{ind}(f) \langle x, y \rangle .$$

Aus Formel (1.6) folgt, daß äquivalente Darstellungen denselben Index haben. In der physikalischen Literatur, wo man die Darstellungen einer gegebenen Lie-Algebra gewöhnlich durch die Angabe der Dimension n des Darstellungsraumes in der Form \underline{n} kennzeichnet, benutzt man den Index zur Unterscheidung von nichtäquivalenten Darstellungen gleicher Dimension.

In den nächsten beiden Sätzen sammeln wir wichtige Eigenschaften des Index.

Satz 4.14 *Sei \mathcal{L} eine komplexe einfache Lie-Algebra und (V, f) eine Darstellung. Es gilt $f = 0$ gdw. $\text{ind}(f) = 0$.*

BEWEIS: Die eine Richtung ist klar. Sei deshalb $\text{ind}(f) = 0$. Dann gilt $B_f = 0$. Formel (2.7) liefert $0 = B_f(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{\mu \in \Gamma(f)} m(\mu) \cdot (\mu, \alpha)^2$, d. h. $\Gamma(f) \perp \Sigma$. Es folgt $f = 0$. ■

Satz 4.15 *Seien (V, f) und (W, g) Darstellungen der einfachen komplexen Lie-Algebra \mathcal{L} . Dann gilt*

- (a) $\text{ind}(f^*) = \text{ind}(f)$
- (b) $\text{ind}(f \oplus g) = \text{ind}(f) + \text{ind}(g)$
- (c) $\text{ind}(f \otimes g) = \dim(W) \cdot \text{ind}(f) + \dim(V) \cdot \text{ind}(g)$.

BEWEIS:

zu (a): Sei $\{e_\mu\}$ eine Basis in V und $\{e^\mu\}$ die duale Basis in V^* . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \text{tr}_{V^*}(f^*(x)f^*(y)) &= \sum_\mu \left(f^*(x)f^*(y)e^\mu \right) (e_\mu) \\ &= \sum_\mu e^\mu \left((-f(y))(-f(x))e_\mu \right) = \text{tr}_V(f(y)f(x)) = \text{tr}_V(f(x)f(y)) . \end{aligned}$$

zu (b): Es gilt $\text{tr}_{V \oplus W} \left((f \oplus g)(x) \circ (f \oplus g)(y) \right) = \text{tr}_V(f(x)f(y)) + \text{tr}_W(g(x)g(y))$.

zu (c): Seien $x, y \in \mathcal{L}$ gegeben. Für beliebige $v \otimes w \in V \otimes W$ ist

$$(f \otimes g)(x) \circ (f \otimes g)(y) (v \otimes w) \\ = (f(x)f(y)v) \otimes w + (f(x)v) \otimes (g(y)w) + (f(y)v) \otimes (g(x)w) + v \otimes (g(x)g(y)w).$$

Damit ergibt sich

$$\operatorname{tr}_{V \otimes W} \left((f \otimes g)(x) \circ (f \otimes g)(y) \right) = \dim(W) \operatorname{tr}_V(f(x)f(y)) + \operatorname{tr}_V(f(x)) \operatorname{tr}_W(g(y)) \\ + \operatorname{tr}_V(f(y)) \operatorname{tr}_W(g(x)) + \dim(V) \operatorname{tr}_W(g(x)g(y)).$$

Die gemischten Glieder verschwinden, da sich x, y wegen der Halbeinfachheit von \mathcal{L} als Kommutatoren schreiben lassen. ■

Quadratischer Casimir-Operator

Sei \mathcal{L} einfach und seien $\{x_i\}, \{y_i\}$ duale Basen bezüglich der kanonisch normierten ISBLF¹¹. Der lineare Operator

$$C(f) := \sum_i f(x_i)f(y_i) \quad (4.7)$$

auf V heißt *quadratischer Casimir-Operator* der Darstellung (V, f) .

Wir müssen prüfen, daß die Definition sinnvoll, d. h. unabhängig von der Wahl der dualen Basen ist. Seien deshalb $\{x'_i\}, \{y'_i\}$ zwei weitere duale Basen. Wir entwickeln $x'_i = \sum_j A_{ij}x_j$ und $y'_i = \sum_k B_{ik}y_k$ und erhalten $\sum_i f(x'_i)f(y'_i) = \sum_{j,k} (\sum_i A_{ij}B_{ik}) f(x_j)f(y_k)$ (*). A_{ij} und B_{ik} erfüllen $\delta_{kj} = \langle y'_k, x'_j \rangle = \sum_{i,l} \langle B_{ki}y_i, A_{jl}x_l \rangle = \sum_i A_{ji}B_{ki}$. Diese Gleichung lesen wir als Gleichung zwischen Matrizen: $AB^T = \mathbb{1}$. Dann ist $B^T = A^{-1}$ und deshalb auch $B^T A = \mathbb{1}$. Schreiben wir dies wieder mit Indizes, so ergibt sich $\sum_i B_{ik}A_{ij} = \delta_{kj}$ und aus (*) folgt $\sum_i f(x_i)f(y_i) = \sum_i f(x'_i, y'_i)$.

BEMERKUNGEN:

1. Man beachte, daß der Casimir-Operator im allgemeinen nicht zum Bild von \mathcal{L} unter der Darstellung f gehört.
2. Im allgemeineren Falle einer halbeinfachen Lie-Algebra würde man Basen nehmen, die bezüglich der Killing-Form dual sind. Für einfache Lie-Algebren würde dann der Unterschied zu obiger Definition in einem Faktor $\operatorname{ind}(\operatorname{ad})$ bestehen.
3. Sei $\{e_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ ein System normierter Wurzelvektoren. Die zu $\{e_\alpha, h_{\alpha_i}\}$ duale Basis ist $\{\operatorname{ind}(\operatorname{ad}) e_{-\alpha}, \sum_j (B^{-1})_{ij} h_{\alpha_j}\}$, wobei $B_{ij} := \langle h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j} \rangle$. Mit Hilfe dieser Basen berechnet sich der quadratische Casimir-Operator folgendermaßen:

$$C(f) = \sum_{i,j=1}^{\ell} f(h_{\alpha_i}) (B^{-1})_{ij} f(h_{\alpha_j}) + \operatorname{ind}(\operatorname{ad}) \sum_{\alpha \in \Sigma} f(e_\alpha) f(e_{-\alpha}). \quad (4.8)$$

Satz 4.16 *Sei \mathcal{L} eine einfache komplexe Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW in Σ . Sei (V, f) eine nichttriviale Darstellung. Der quadratische Casimir-Operator $C(f)$ hat folgende Eigenschaften:*

- (a) $[C(f), f(\mathcal{L})] = 0$
- (b) $C(f) v_{\Lambda(f)} = \langle \Lambda(f), \Lambda(f) + 2\delta \rangle v_{\Lambda(f)}$ ¹²
- (c) $\operatorname{tr} C(f) = \operatorname{ind}(f) \cdot \dim(\mathcal{L})$. Insbesondere ist $C(f) \neq 0$.

BEWEIS:

zu (a): Für $x \in \mathcal{L}$ berechnen wir $[C(f), f(x)] = \sum_i f(x_i)f([y_i, x]) + \sum_i f([x_i, x])f(y_i)$. Wir

¹¹d. h. $\langle y_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$

¹²zur Definition von δ siehe Gleichung (2.23)

entwickeln $[x_i, x] = \sum_j \langle [x_i, x], y_\varphi \rangle x_j$ und $[y_i, x] = \sum_j \langle [y_i, x], x_j \rangle y_j$ und vertauschen bei der zweiten Summe die Summationsindizes. Es ergibt sich

$$[C(f), f(x)] = \sum_{i,j} (\langle [x_i, x], y_j \rangle + \langle [y_j, x], x_i \rangle) f(x_j) f(y_j) = 0.$$

zu (b): Wir verwenden die Abkürzung $\Lambda = \Lambda(f)$. Formel (4.8) liefert

$$C(f)v_\Lambda = \sum_{i,j} \Lambda(h_{\alpha_i})(B^{-1})_{ij} \Lambda(h_{\alpha_j})v_\Lambda + \text{ind}(\text{ad}) \sum_{\alpha \in \Sigma} f(e_\alpha) f(e_{-\alpha})v_\Lambda.$$

Betrachten wir den ersten Term: Wir entwickeln $\Lambda = \sum_k n^k \alpha_k$. Unter Verwendung von $(\alpha_k, \alpha_i) = (h_{\alpha_k}, h_{\alpha_i}) = \text{ind}(\text{ad})B_{ki}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Lambda(h_{\alpha_i})(B^{-1})_{ij} \Lambda(h_{\alpha_j}) &= \sum_{i,j,k,l} n^k n^l (\alpha_k, \alpha_i) (B^{-1})_{ij} (\alpha_l, \alpha_j) \\ &= \sum_{j,k,l} n^k n^l \delta_{kj} \text{ind}(\text{ad}) (\alpha_l, \alpha_j) \\ &= \langle \Lambda, \Lambda \rangle. \end{aligned}$$

Zum zweiten Term: Wegen $f(e_{-\alpha})v_\Lambda = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^-$ läuft die Summe nur über Σ^+ und kann dort ersetzt werden durch

$$\text{ind}(\text{ad}) \sum_{\alpha \in \Sigma^+} [f(e_\alpha), f(e_{-\alpha})]v_\Lambda = \text{ind}(\text{ad}) \left(\Lambda, \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha \right) v_\Lambda = \langle \Lambda, 2\delta \rangle v_\Lambda.$$

zu (c): Es gilt $\text{tr} C(f) = \sum_i B_f(x_i, y_i) = \text{ind}(f) \sum_i \langle x_i, y_i \rangle = \text{ind}(f) \dim(\mathcal{L})$. ■

Aus dem Satz ergibt sich die folgende elegante Möglichkeit, den Index einer *irreduziblen* Darstellung zu berechnen:

$$\text{ind}(f) = \langle \Lambda(f), \Lambda(f) + 2\delta \rangle \frac{\dim(V)}{\dim(\mathcal{L})}. \quad (4.9)$$

BEWEIS: Aus Satz 4.16 (a) folgt, daß $C(f)$ proportional zu id_V ist (Lemma von Schur). Punkt (b) desselben Satzes liefert den Proportionalitätsfaktor und Punkt (c) durch Einsetzen die Behauptung. ■

Dimensionsformel von Weyl

Da die Ableitung dieser Formel recht aufwendig und darüber hinaus in jedem der einschlägigen Lehrbücher zu finden ist, zitieren wir sie hier nur:

Satz 4.17 *Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW. Die Dimension einer irreduziblen Darstellung (V, f) ist gegeben durch*

$$\dim(V) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{(\alpha, \Lambda(f) + \delta)}{(\alpha, \delta)}.$$

Zum Beweis siehe z. B. [Hu], §24.3 oder den Appendix zu §24 auf S. 143 ■

Beispiele

Betrachten wir wieder die fundamentale Darstellung π_1 von A_ℓ . Mit dem höchsten Gewicht aus Gleichung (4.6) und dem Funktional δ aus Gleichung (3.3) ergibt sich für den Casimir-Operator $C(\pi_1) = \langle \Lambda(\pi_1), \Lambda(\pi_1) + 2\delta \rangle \text{id} = \frac{(\ell+1)^2 - 1}{\ell+1} \text{id}$. Gleichung (4.9) liefert dann $\text{ind}(\pi_1) = 1$. Die kanonisch normierte ISBLF auf $sl(\ell+1, \mathbb{C})$ ist also gerade die Spurform $\text{tr}(xy)$.

(ÜA) Berechnung von Casimir-Operator und Index weiterer fundamentaler Darstellungen mit Hilfe der Tabellen im Anhang.

Kapitel 5

Halbeinfache Unteralgebren

5.1 Äquivalenz und lineare Äquivalenz

Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ Lie-Algebren. Zwei Einbettungen $\varphi, \psi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ heißen *äquivalent*, falls ein innerer Automorphismus U von \mathcal{L} mit $\varphi = U \circ \psi$ existiert. Sie heißen *linear äquivalent*, falls für jede Darstellung (V, f) von \mathcal{L} gilt, daß die Darstellungen $(V, f \circ \varphi)$ und $(V, f \circ \psi)$ von \mathcal{L}' äquivalent sind.¹

Äquivalenz impliziert lineare Äquivalenz; die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Im Falle halbeinfacher Lie-Algebren hat man das folgende Kriterium für die Relation der linearen Äquivalenz:

Satz 5.1 *Seien $\mathcal{L}', \mathcal{L}$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren und sei H' eine Cartan-Unteralgebra von \mathcal{L}' . Zwei Einbettungen $\varphi, \psi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ sind genau dann linear äquivalent, wenn die Einbettungen $\varphi|_{H'}, \psi|_{H'} : H' \rightarrow \mathcal{L}$ äquivalent sind.*

BEWEIS: Seien H, H' Cartan-Unteralgebren in $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ mit Wurzelsystemen Σ, Σ' und seien π, π' SEW in Σ, Σ' .

(\Leftarrow) Wir wählen H so, daß es $\varphi(H')$ enthält. Ist U ein innerer Automorphismus von \mathcal{L} mit $\varphi|_{H'} = U \circ \psi|_{H'}$, dann gilt für die dualen Abbildungen $\varphi^*|_{H^*} = \psi^* \circ U^*|_{H^*}$. Sei (V, f) eine Darstellung von \mathcal{L} . Lemma 4.2 liefert

$$\Gamma_{H'}(f \circ \varphi) = \varphi^* \Gamma_H(f) = \psi^* \circ U^* \Gamma_H(f) = \Gamma_{H'}(f \circ U \circ \psi).$$

Es folgt die lineare Äquivalenz von φ und $U \circ \psi$ und damit auch die φ und ψ .

(\Rightarrow) Wir zeigen zunächst

Lemma 5.2 *Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren, H, H' Cartan-Unteralgebren und π, π' SEW in den zugehörigen Wurzelsystemen. Zu jeder Einbettung $\varphi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ gibt es eine äquivalente Einbettung $\tilde{\varphi}$ und eine Permutation τ von π , so daß gilt*

- $\tilde{\varphi}(H') \subseteq H$
- $\tau\pi$ und π' sind verträglich² bezüglich der Abbildung $\tilde{\varphi}^* : H_0^* \rightarrow H_0'^*$.

BEWEIS: Da $\varphi(H')$ in einer Cartan-Unteralgebra enthalten ist, gibt es einen inneren Automorphismus U_1 von \mathcal{L} mit $U_1 \circ \varphi(H') \subseteq H$. Wir setzen $\varphi_1 := U_1 \circ \varphi$. Nach Lemma

¹Die Darstellung $f \circ \varphi$ von \mathcal{L}' heißt *Verzweigungsregel* der Darstellung f von \mathcal{L} nach der Unteralgebra (\mathcal{L}', φ) .

²Definition in Lemma 4.2

4.2 (c) ist $\varphi_1^* : H_0^* \rightarrow H_0'^*$ eine surjektive lineare Abbildung. Die adjungierte Abbildung $\varphi_1^{*\dagger} : H_0'^* \rightarrow H_0^*$, definiert durch $(\varphi^{*\dagger}\varrho', \sigma)_{H_0^*} = (\varrho', \varphi^*\sigma)_{H_0'^*} \quad \forall \varrho' \in H_0'^*, \sigma \in H_0^*$, ist daher injektiv. Insbesondere ist $\varphi_1^{*\dagger}\pi'$ ein linear unabhängiges System in H_0^* . Wir vervollständigen es zu einer geordneten Basis und zwar so, daß die hinzugenommenen Vektoren orthogonal zu $\varphi_1^{*\dagger}\pi'$ sind. Sei π_1 das durch diese Basis erzeugte SEW in Σ . Satz 2.25 liefert einen inneren Automorphismus U_2 von \mathcal{L} mit $U_2(H) = H$ und $U_2^*\pi = \pi_1$. Schließlich finden wir eine Permutation τ von π , so daß die Abbildung $U_2^* : \tau\pi \rightarrow \pi_1$ die Ordnung erhält. Wir setzen $\tilde{\varphi} := U_2 \circ \varphi_1$. Nach Konstruktion gilt:

- $\tilde{\varphi}(H') \subseteq H$
- Die SEW $\tau\pi$ und π' sind verträglich bezüglich $\tilde{\varphi}^*$, d. h. für beliebige $\varrho, \sigma \in H_0^*$ gilt: Aus $\varrho \geq \sigma$ (bezüglich der durch $\tau\pi$ definierten Ordnung) folgt $\tilde{\varphi}^*\varrho \geq \tilde{\varphi}^*\sigma$ (bezüglich der durch π' definierten Ordnung).

Wir fahren im Beweis des Satzes fort: Mit Hilfe des Lemmas gehen wir über zu äquivalenten Einbettungen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$. Seien τ_φ, τ_ψ die entsprechenden Permutationen von π . Nach Voraussetzung sind $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ linear äquivalent. Insbesondere ist $\Lambda_{H',\pi'}(f \circ \tilde{\varphi}) = \Lambda_{H',\pi'}(f \circ \tilde{\psi})$ für beliebige Darstellungen (V, f) von \mathcal{L} . Mit Lemma 4.2 ergibt sich

$$\tilde{\varphi}^* \Lambda_{H,\tau_\varphi\pi}(f) = \Lambda_{H',\pi'}(f \circ \tilde{\varphi}) = \Lambda_{H',\pi'}(f \circ \tilde{\psi}) = \tilde{\psi}^* \Lambda_{H,\tau_\psi\pi}(f).$$

Ist f irreduzibel, dann gilt $\Lambda_{H,\tau_\varphi\pi}(f) = \Lambda_{H,\pi}(f) = \Lambda_{H,\tau_\psi\pi}(f)$ (Satz 4.4 (c)). Da H^* zum Beispiel durch die höchsten Gewichte der fundamentalen Darstellungen von \mathcal{L} aufgespannt wird, folgt $\tilde{\varphi}^*|_{H^*} = \tilde{\psi}^*|_{H^*}$, also $\tilde{\varphi}|_{H'} = \tilde{\psi}|_{H'}$ und $\varphi|_{H'} = \psi|_{H'}$ sind äquivalent. ■

Bei einer genaueren Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Äquivalenz und linearer Äquivalenz von halbeinfachen Unteralgebren findet man folgendes Resultat:

Satz 5.3 *Bei den Lie-Algebren A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ sind zwei Einbettungen einer halbeinfachen Unteralgebra genau dann äquivalent, wenn sie linear äquivalent sind. Bei der Serie D_ℓ dagegen gibt es Einbettungen, die zwar linear äquivalent, aber nicht äquivalent sind.*

(Vgl. dazu [Dy, §I.1, n° 5].) ■

5.2 Die Methode der definierenden Darstellungen

Definierende Darstellungen

Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ halbeinfache Lie-Algebren. Aus dem Beweis des Satzes 5.1 geht hervor, daß man, um die lineare Äquivalenz zweier Einbettungen $\varphi, \psi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ zu prüfen, nur $f \circ \varphi$ und $f \circ \psi$ für $\ell = \text{rg}(\mathcal{L})$ geeignet gewählte irreduzible Darstellungen f von \mathcal{L} untersuchen muß. Es zeigt sich, daß der Aufwand sogar noch weiter reduziert werden kann. Wir nennen eine Menge $\{f_1, \dots, f_r\}$ von Darstellungen von \mathcal{L} einen *Satz definierender Darstellungen*, falls sie die Eigenschaft besitzt, daß die lineare Äquivalenz zweier Einbettungen φ, ψ einer beliebigen halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L}' schon aus der Äquivalenz der Darstellungen $f_i \circ \varphi$ und $f_i \circ \psi$ von \mathcal{L}' , $i = 1, \dots, r$, folgt.

Im folgenden Satz geben wir ein Kriterium dafür an, wann eine Darstellung *allein* schon definierend ist. Zwar besitzt nicht jede Lie-Algebra eine definierende Darstellung (vgl. Satz 5.5), das Kriterium läßt sich aber leicht auf Mengen von Darstellungen verallgemeinern, so daß es bei beliebigen halbeinfachen Lie-Algebren zum Aufsuchen von Sätzen definierender Darstellungen benutzt werden kann.

Satz 5.4 Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra vom Rang ℓ , H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ und π ein SEW in Σ . Sei (V, ω) eine irreduzible Darstellung. Erfüllen die ℓ größten Gewichte μ_1, \dots, μ_ℓ von ω die Bedingungen

- $\mu_1 > \dots > \mu_\ell$ bezüglich jeder Anordnung der Elemente von π
- $H^* = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\mu_1, \dots, \mu_\ell\}$,

dann ist (V, ω) eine definierende Darstellung.

BEWEIS: Wir wählen eine Cartan-Unteralgebra H' in \mathcal{L}' und ein SEW π' im zugehörigen Wurzelsystem Σ' . Seien $\varphi, \psi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ Einbettungen und seien die Darstellungen $\omega \circ \varphi$ und $\omega \circ \psi$ von \mathcal{L}' äquivalent. Dann gilt $\Gamma_{H'}(f \circ \varphi) = \Gamma_{H'}(f \circ \psi) = \Gamma'$.

Nach Lemma 5.2 können wir voraussetzen, daß $\varphi(H') \subseteq H$ und $\psi(H') \subseteq H$ erfüllt ist und Permutationen τ_φ, τ_ψ von π existieren, so daß die SEW π' und $\tau_\varphi\pi$ bzw. $\tau_\psi\pi$ bezüglich φ^* bzw. ψ^* verträglich sind. Da die Reihenfolge $\mu_1 > \dots > \mu_\ell$ nach Voraussetzung unabhängig davon ist, ob die Ordnung auf H_0^* von $\pi, \tau_\varphi\pi$ oder $\tau_\psi\pi$ erzeugt wird, haben wir

$$\varphi^*\mu_1 \geq \dots \geq \varphi^*\mu_\ell \geq \varphi^*\mu, \quad \psi^*\mu_1 \geq \dots \geq \psi^*\mu_\ell \geq \psi^*\mu \quad \forall \mu < \mu_\ell \quad (*)$$

bezüglich der durch π' definierten Ordnung auf H_0^* .

Nach Satz 5.1 genügt es, $\varphi|_{H'} = \psi|_{H'}$ bzw. $\varphi^*|_{H^*} = \psi^*|_{H^*}$ zu prüfen. Zu diesem Zweck zeigen wir $\varphi^*\mu_i = \psi^*\mu_i, i = 1, \dots, \ell$:

(Induktion) Offensichtlich ist $\varphi^*\mu_1 = \psi^*\mu_1$. Gelte daher $\varphi^*\mu_i = \psi^*\mu_i$ für $i \leq n$. Sei k der kleinste Index, für den $\varphi^*\mu_k \neq \psi^*\mu_k$ erfüllt ist. Aus der Formel für die Vielfachheiten in Lemma 4.2 (b) ergibt sich

$$\varphi^*\mu_{n+1} = \varphi^*\mu_n \iff m(\varphi^*\mu_n) > m(\mu_k) + \dots + m(\mu_n).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch

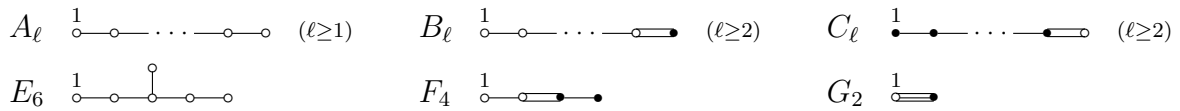
$$\psi^*\mu_{n+1} = \psi^*\mu_n \iff m(\psi^*\mu_n) > m(\mu_k) + \dots + m(\mu_n)$$

und damit $\varphi^*\mu_{n+1} = \varphi^*\mu_n \iff \psi^*\mu_{n+1} = \psi^*\mu_n$.

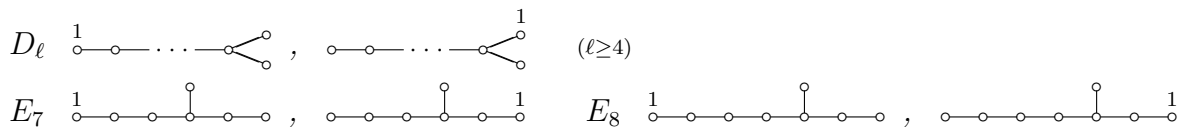
Im Falle $\varphi^*\mu_{n+1} = \varphi^*\mu_n$ folgt sofort $\varphi^*\mu_{n+1} = \psi^*\mu_{n+1}$. Im Falle $\varphi^*\mu_{n+1} \neq \varphi^*\mu_n$ wird μ_{n+1} aufgrund von (*) sowohl durch φ^* als auch durch ψ^* auf das größte der Gewichte aus $\Gamma' \setminus \{\varphi^*\mu_1, \dots, \psi^*\mu_n\}$ abgebildet und es folgt ebenfalls $\varphi^*\mu_{n+1} = \psi^*\mu_{n+1}$. ■

Betrachten wir wieder zuerst die einfachen Lie-Algebren:

Satz 5.5 Für die Lie-Algebren $A_\ell, B_\ell, C_\ell, E_6, F_4$ und G_2 sind die folgenden Darstellungen definierend:



Für die Lie-Algebren D_ℓ, E_7 und E_8 sind die folgenden Sätze von Darstellungen definierend:



BEWEIS: Bei den Lie-Algebren mit *einer* definierenden Darstellung rekonstruiert man die ℓ größten Gewichte und prüft, daß sie die Voraussetzungen von Satz 5.4 erfüllen. Bei den anderen rekonstruiert man, beginnend mit dem höchsten Gewicht $\mu_1^{(i)}$, für jede der beiden Darstellungen $\omega^{(i)}$ eine möglichst lange Sequenz $\mu_1^{(i)} > \dots > \mu_{r_i}^{(i)}$ aufeinanderfolgender Gewichte, bei der die Reihenfolge unabhängig von der Anordnung des zugrundegelegten

SEW ist. Man verifiziert $H^* = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{r_i}^{(i)}, i = 1, 2\}$. Der Beweis von Satz 5.4 läßt sich dann direkt auf die vorliegende Situation übertragen. ■

Aus der Argumentation für die Lie-Algebren D_ℓ, E_7, E_8 folgt unmittelbar

Satz 5.6 *Sätze definierender Darstellungen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathcal{L} erhält man durch Vereinigung³ von Sätzen definierender Darstellungen der einfachen Ideale von \mathcal{L} .* ■

Konstruktion von Einbettungen

Seien $\mathcal{L}', \mathcal{L}$ halbeinfache Lie-Algebren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß \mathcal{L} eine definierende Darstellung ω besitzt. Die Darstellung ω assoziiert zu jeder Einbettung $\varphi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ eine *charakteristische Darstellung* $\omega \circ \varphi$ von \mathcal{L}' , die anzeigt, zu welcher linearen Äquivalenzklasse φ gehört. Um die Menge der linearen Äquivalenzklassen von Einbettungen $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ bestimmen zu können, müssen wir herausfinden, welche Darstellungen von \mathcal{L}' als charakteristische Darstellung einer Einbettung $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ auftreten können. Daher wollen wir uns jetzt der folgenden Frage zuwenden:

Sei f eine Darstellung von \mathcal{L}' . Wann existiert eine Einbettung $\varphi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$, so daß $\omega \circ \varphi$ und f äquivalent sind?

Eine notwendige Bedingung ist $\dim(f) = \dim(\omega)$. Dies setzen wir im folgenden voraus. Seien wieder Cartan-Unteralgebren H, H' und SEW π, π' in den entsprechenden Wurzelsystemen Σ, Σ' gewählt. Seien weiterhin $\{e_\alpha : \alpha \in \Sigma\}, \{e_{\alpha'} : \alpha' \in \Sigma'\}$ Weyl-Chevalley-Basen in $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$.

Wir listen die Gewichtssysteme $\Gamma_H(\omega)$ bzw. $\Gamma_{H'}(f)$ der Größe nach auf, und zwar so, daß jedes Gewicht seiner Vielfachheit entsprechend oft enthalten ist. Wegen $\dim(f) = \dim(\omega)$ enthalten beide Listen gleich viele Einträge. Wir ordnen die Einträge der Reihe nach einander zu. Wir wollen annehmen, daß diese Zuordnung eine Abbildung $\Gamma_H(\omega) \rightarrow \Gamma_{H'}(f)$ induziert und diese Abbildung zu einer surjektiven linearen Abbildung $\psi : H^* \rightarrow H'^*$ fortsetzbar ist (anderenfalls existiert mit Sicherheit keine Einbettung mit charakteristischer Darstellung f). Die duale Abbildung $\psi^* : H' \rightarrow H$ ist dann injektiv. Dasselbe gilt für die (bezüglich der Killing-Formen) adjungierte Abbildung $\psi^\dagger : H'^* \rightarrow H^*$.

Sei $\varphi := \psi^*$. Wir wollen φ zu einer Einbettung von \mathcal{L}' fortsetzen. Dazu genügt es, $\varphi(e_{\alpha'})$ und $\varphi(e_{-\alpha'})$ für $\alpha' \in \pi'$ anzugeben, und zwar so, daß die Bedingungen

$$\varphi[h_{\beta'}, e_{\alpha'}] = [\varphi h_{\beta'}, \varphi e_{\alpha'}], \quad \varphi[e_{\alpha'}, e_{-\alpha'}] = [\varphi e_{\alpha'}, \varphi e_{-\alpha'}] \quad \forall \alpha' \in \pi' \quad (5.1)$$

erfüllt sind. Wir entwickeln $\varphi e_{\alpha'} = \sum_{\beta \in \Sigma} C_{\alpha', \beta} e_\beta + \sum_{\alpha \in \pi} D_{\alpha', \alpha} h_\alpha$ und beachten

$$\varphi h_{\alpha'} = h_{\psi^\dagger \alpha'}. \quad (5.2)$$

Desweiteren bilden wir $Q_{\alpha'} := \{\beta \in \Sigma : \psi\beta = \alpha'\}$. Man rechnet nach, daß die D -Koeffizienten sowie die $C_{\alpha', \alpha}$ mit $\varphi^* \alpha \neq \alpha'$ verschwinden müssen und daß die Bedingungen

³vgl. die Fußnote auf Seite 76

(5.1) äquivalent sind zu der sogenannten *Einbettungsgleichung*

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in Q_{\alpha'}} C_{\alpha', \alpha} C_{-\alpha', -\alpha} \alpha &= \psi^\dagger \alpha' \\ \sum_{\substack{\alpha, \beta \in Q_{\alpha'} \\ \alpha \neq \beta}} C_{\alpha', \alpha} C_{-\alpha', -\beta} N_{\alpha, -\beta} e_{\alpha - \beta} &= 0 \quad \forall \alpha' \in \pi'. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Man beachte, daß dieses Gleichungssystem vollständig entkoppelt und daher sehr einfach zu lösen ist. Jede Lösung $\{C_{\alpha', \alpha} : \alpha' \in \Sigma', \alpha \in Q_{\alpha'}\}$ definiert eine Einbettung $\varphi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ durch

$$\varphi(e_{\alpha'}) := \sum_{\alpha \in Q_{\alpha'}} C_{\alpha', \alpha} e_{\alpha}, \quad \varphi(e_{-\alpha'}) := \sum_{\alpha \in Q_{\alpha'}} C_{-\alpha', -\alpha} e_{-\alpha}. \quad (5.4)$$

Nach Konstruktion gilt $\Gamma_{H'}(\omega \circ \varphi) = \varphi^* \Gamma_H(\omega) = \psi \Gamma_H(\omega) = \Gamma_{H'}(f)$, d. h. f ist die charakteristische Darstellung der Einbettung φ . Einbettungen zu verschiedenen Lösungen von (5.3) sind deshalb linear äquivalent.

Beispiele

Der Einfachheit halber untersuchen wir nur A_1 -Unteralgebren. Wir vereinbaren, im folgenden die durch die *kanonisch normierten ISBLF* induzierten Isomorphismen $H \rightarrow H^*$ bzw. $H' \rightarrow H'^*$ zugrunde zu legen.

Betrachten wir $\mathcal{L} = A_4$ mit der definierenden Darstellung $\omega = \pi_1^{A_4}$ und die Darstellung $f = \pi_1^{A_1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{1}$ von A_1 und versuchen wir, eine Einbettung $\varphi : A_1 \rightarrow A_4$ mit der charakteristischen Darstellung f zu finden. Seien H', H Cartan-Unteralgebren in A_1, A_4 und $\pi' = \{\alpha'\}$, $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$ SEW in den entsprechenden Wurzelsystemen Σ' bzw. Σ . Das Gewichtssystem von f ist $\Gamma_{H'}(f) = \{\frac{1}{2}\alpha', 0, -\frac{1}{2}\alpha'\}$ mit den Vielfachheiten $m(\frac{1}{2}\alpha') = m(-\frac{1}{2}\alpha') = 1$ und $m(0) = 3$. Wir ordnen die Gewichte zu:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_H(\pi_1^{A_4}) & \Gamma_{H'}(f) \\ \Lambda & \mapsto \frac{1}{2}\alpha' \\ \Lambda - \alpha_1 & \mapsto 0 \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 & \mapsto 0 \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & \mapsto 0 \\ \Lambda - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 & \mapsto -\frac{1}{2}\alpha' \end{array} .$$

Diese Zuordnung erzeugt eine surjektive lineare Abbildung $\psi : H^* \rightarrow H'^*$, die auf den Elementen von π durch $\psi\alpha_1 = \psi\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha'$ und $\psi\alpha_2 = \psi\alpha_3 = 0$ gegeben ist. Wir lesen $Q_{\alpha'} = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$ ab. Um die adjungierte Abbildung ψ^\dagger zu bestimmen, entwickeln wir $\psi^\dagger \alpha' = \sum_{i=1}^4 \xi^i \alpha_i$ und bestimmen die Koeffizienten ξ^i aus dem Gleichungssystem $\langle \psi^\dagger \alpha', \alpha_i \rangle_{A_4} = \langle \alpha', \psi \alpha_i \rangle_{A_1}$, $i = 1, \dots, 4$. Nach Einsetzen hat dieses die Gestalt $\sum_j \xi^j A_{ji} = \delta_{i1} + \delta_{i4}$, wobei A_{ji} die Cartan-Matrix von A_4 ist. Als Lösung erhalten wir $\psi^\dagger \alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Damit wird die Einbettungsgleichung (5.3) zu $C_+ C_- = 1$. Wir wählen $C_+ = C_- = 1$. Die zugehörige Einbettung ist dann gemäß (5.4) gegeben durch

$$\varphi e_{\alpha'} = e_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}, \quad \varphi e_{-\alpha'} = e_{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} .$$

(ÜA) 1. Für $f = \underline{5}$ (die 5-dimensionale irreduzible Darstellung von A_1) findet man eine Einbettung $\varphi e_{\pm\alpha'} = 2e_{\pm\alpha_1} + \sqrt{6}e_{\pm\alpha_2} + \sqrt{6}e_{\pm\alpha_3} + 2e_{\pm\alpha_4}$ ($\Gamma(\underline{5})$ kann man den Beispielen zum Abschnitt 4.2 entnehmen).

2. Es gibt Einbettungen $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_3$ mit der charakteristischen Darstellung $f = \pi_1^{A_1} \oplus \pi_1^{A_1}$, z. B. $\varphi e_{\pm\alpha'} = e_{\pm\alpha_2} + e_{\pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$ oder $\varphi e_{\pm\alpha'} = e_{\pm(\alpha_1 + \alpha_2)} + e_{\pm(\alpha_2 + \alpha_3)}$.

5.3 Indizes einfacher Unteralgebren in einfachen Lie-Algebren

Seien \mathcal{L}' , \mathcal{L} einfache Lie-Algebren. Eine Einbettung $\varphi : \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ induziert eine ISBLF B_φ durch

$$B_\varphi(x', y') := \langle \varphi x', \varphi y' \rangle_{\mathcal{L}}.$$

Nach Satz 3.5 ist B_φ proportional zur kanonisch normierten ISBLF auf \mathcal{L}' . In Analogie zur Darstellungstheorie nennt man den Proportionalitätsfaktor *Index* $\text{ind}(\varphi)$ der Unteralgebra (\mathcal{L}', φ) :

$$B_\varphi(x', y') = \text{ind}(\varphi) \langle x', y' \rangle_{\mathcal{L}'} \quad \forall x', y' \in \mathcal{L}'.$$

Für eine beliebige Darstellung f von \mathcal{L} gilt

$$\text{ind}(f \circ \varphi) = \text{ind}(f) \text{ind}(\varphi). \quad (5.5)$$

Sei ω eine definierende Darstellung von \mathcal{L} . Wir wollen (5.5) benutzen, um den Index einer Unteralgebra (\mathcal{L}', φ) aus dem Index ihrer charakteristischen Darstellung $\omega \circ \varphi$ zu berechnen. Dazu zerlegen wir letztere in irreduzible Komponenten: $\omega \circ \varphi = \bigoplus_i f_i$. Nach Satz 4.15 (b) gilt $\text{ind}(\omega \circ \varphi) = \sum_i \text{ind}(f_i)$. Die Indizes von f_i und ω entnehmen wir der Gleichung (4.9). Durch Einsetzen in (5.5) ergibt sich

$$\text{ind}(\varphi) = \frac{\sum_i \langle \Lambda(f_i), \Lambda(f_i) + 2\delta_{\mathcal{L}'} \rangle_{\mathcal{L}'} \dim(V_i)}{\langle \Lambda(\omega), \Lambda(\omega) + 2\delta_{\mathcal{L}} \rangle_{\mathcal{L}} \dim(V)} \frac{\dim(\mathcal{L}')}{\dim(\mathcal{L})}. \quad (5.6)$$

Zum Abschluß zitieren wir noch ein interessantes Resultat von Dynkin [Dy, Thm 2.2]:

Satz 5.7 *Der Index einer einfachen Unteralgebra in einer einfachen komplexen Lie-Algebra ist ganzzahlig.* ■

Beispiele

(Fortsetzung der Beispiele zum Abschnitt 5.2) Für die Einbettung $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_4$ mit charakteristischer Darstellung $\omega \circ \varphi = \pi_1^{A_1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{1}$ finden wir

$$\langle \varphi h_{\alpha'}, \varphi h_{\alpha'} \rangle_{A_4} = \langle h_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}, h_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \rangle_{A_4} = \left\langle \sum_i \alpha_i, \sum_i \alpha_i \right\rangle_{A_4} = 2.$$

Andererseits gilt $\langle h_{\alpha'}, h_{\alpha'} \rangle_{A_1} = \langle \alpha', \alpha' \rangle_{A_1} = 2$. Der Index ist also 1. (Man erinnere sich, daß die Isomorphismen $\alpha \mapsto h_\alpha$ bzw. $\alpha' \mapsto h_{\alpha'}$ hier durch die kanonisch normierten ISBLF induziert sind).

(ÜA) 1. Für die Einbettung $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_4$ mit $\omega \circ \varphi = \underline{5}$ ergibt sich $\text{ind}(\varphi) = 20$.

2. Für die Einbettung $A_1 \xrightarrow{\varphi} A_3$ mit $\omega \circ \varphi = \pi_1^{A_1} \oplus \pi_1^{A_1}$ gilt $\text{ind}(\varphi) = 2$.

5.4 Reguläre halbeinfache Unteralgebren

Reguläre halbeinfache Unteralgebren einer halbeinfachen Lie-Algebra zeichnen sich dadurch aus, daß sie mit der Wurzelraumzerlegung kompatibel sind. Sie lassen sich daher mit Hilfe des Wurzelkalküls sehr einfach beschreiben und vollständig klassifizieren.

Der Einfachheit halber wollen wir Unteralgebren in diesem Abschnitt stets als Teilmengen auffassen.

Reguläre Untereralgebren

Sei \mathcal{L} eine halbeinfache Lie-Algebra. Eine Untereralgebra \mathcal{L}' von \mathcal{L} heißt *regulär*, falls es eine Cartan-Untereralgebra H von \mathcal{L} gibt, so daß \mathcal{L}' invariant unter $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$ ist. (Wir sagen dann, daß \mathcal{L}' regulär bezüglich H ist.)

Ist eine Cartan-Untereralgebra H vorgegeben, dann finden wir zu jeder regulären Untereralgebra von \mathcal{L} eine äquivalente, die invariant unter $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$ ist. Es genügt daher, die bezüglich H regulären Untereralgebren zu betrachten. Diese haben die folgende allgemeine Form:

Satz 5.8 *Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Untereralgebra mit Wurzelsystem Σ . Eine Untereralgebra \mathcal{L}' von \mathcal{L} ist genau dann regulär bezüglich H , wenn es einen Unterraum $H' \subseteq H$ und eine Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ gibt, so daß gilt*

$$\mathcal{L}' = H' \bigoplus_{\alpha \in \Sigma'} \mathcal{L}_{\alpha}. \quad (5.7)$$

BEWEIS: Es ist klar, daß eine Untereralgebra der Gestalt (5.7) invariant unter $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$ ist. Sei umgekehrt \mathcal{L}' invariant unter $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$. Dann ist $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)|_{\mathcal{L}'}$ eine kommutative Algebra diagonalisierbarer Operatoren (Satz 2.1 (b)) und man findet eine Zerlegung von \mathcal{L}' in gemeinsame Eigenräume. Diese müssen natürlich Unterräume der gemeinsamen Eigenräume von $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$ in \mathcal{L} und damit von der Gestalt $H' \subseteq H$ bzw. \mathcal{L}_{α} für gewisse $\alpha \in \Sigma$ sein. ■

Eine reguläre Untereralgebra ist also durch das Paar (H', Σ') vollständig bestimmt. Hat man andererseits irgendein Paar (H', Σ') vorgegeben, dann stellt sich die Frage, welche Bedingungen H' und Σ' erfüllen müssen, damit der durch (5.7) definierte Unterraum eine Untereralgebra bildet.

Satz 5.9 *Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Untereralgebra mit Wurzelsystem Σ . Seien weiterhin ein Unterraum $H' \subseteq H$ und eine Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ gegeben. Der Unterraum $\mathcal{L}' = H' \bigoplus_{\alpha \in \Sigma'} \mathcal{L}_{\alpha}$ von \mathcal{L} ist*

(a) *eine Untereralgebra gdw. gilt*

- (U1) *Sind $\alpha, \beta \in \Sigma'$ und $\alpha + \beta \in \Sigma$, dann ist $\alpha + \beta \in \Sigma'$.*
- (U2) *$\Sigma' \cap (-\Sigma') \subseteq H'^*$*

(b) *eine halbeinfache Untereralgebra gdw. gilt*

- (H1) \equiv (U1)
- (H2) $\Sigma' = -\Sigma'$
- (H3) $\text{span}_{\mathbb{C}} \Sigma' = (H')^*$.

In diesem Fall ist H' eine Cartan-Untereralgebra von \mathcal{L}' und Σ' das zugehörige Wurzelsystem.

BEWEIS: Ist \mathcal{L}' eine Untereralgebra (bzw. halbeinfache Untereralgebra), dann ist klar, daß die Bedingungen (U1) und (U2) (bzw. (H1)-(H3)) erfüllt sind. Beweisen wir deshalb die umgekehrte Richtung. Sei dazu ein Paar (H', Σ') gegeben.

zu (a): Seien $\alpha, \beta \in \Sigma'$. Wir prüfen alle möglichen Kommutatoren:

- $[H', H'] \subseteq \mathcal{L}'$ und $[H', \mathcal{L}_{\alpha}] \subseteq \mathcal{L}'$ gilt immer
- $[\mathcal{L}_{\alpha}, \mathcal{L}_{\beta}] \subseteq \mathcal{L}'$ folgt für $\alpha \neq -\beta$ aus (U1) und für $\beta = -\alpha$ aus (U2).

zu (b): Aus (H3) folgt (U2), so daß \mathcal{L}' zumindest Untereralgebra ist. Um zu beweisen, daß \mathcal{L}' halbeinfach ist, zeigen wir, daß ein beliebiges Ideal $\mathcal{I} \neq \{0\}$ in \mathcal{L}' eine A_1 -Untereralgebra enthält und deshalb nicht auflösbar sein kann.

Sei P der bezüglich der Killing-Form orthogonale Projektor von H auf H' . Wegen (H3) gilt $\alpha(h) = \alpha(Ph) \quad \forall \alpha \in \Sigma', h \in H$, also $\text{ad}_{\mathcal{L}}(h)|_{\mathcal{L}'} = \text{ad}_{\mathcal{L}}(Ph)|_{\mathcal{L}'}, \quad \forall h \in H$. Damit ist \mathcal{I} invariant unter $\text{ad}_{\mathcal{L}}(H)$ und folglich von der Gestalt (5.7) mit einem Unterraum $H'' \subseteq H' \subseteq H$ und einer Teilmenge $\Sigma'' \subseteq \Sigma' \subseteq \Sigma$. Dabei muß $H'' \neq 0$ oder $\Sigma'' \neq \emptyset$ gelten.

Fall $H'' \neq \{0\}$: Wegen (H3) gibt es ein $\alpha \in \Sigma'$ mit $\alpha|_{H''} \neq 0$, wegen (H2) ist dann auch $-\alpha \in \Sigma'$. Es folgt $\mathcal{L}_{\alpha} = [H'', \mathcal{L}_{\alpha}] \subseteq \mathcal{I}$ und $\mathcal{L}_{-\alpha} = [H'', \mathcal{L}_{-\alpha}] \subseteq \mathcal{I}$. Damit ist die A_1 -Unteralgebra $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ ⁴ in \mathcal{I} enthalten.

Fall $\Sigma'' \neq \emptyset$: Sei $\alpha \in \Sigma''$. Dann gilt $\mathcal{L}_{\alpha} \subseteq \mathcal{I}$. Wegen (H2) ist wieder $-\alpha \in \Sigma'$. Wir schließen $\mathcal{C}h_{\alpha} = [\mathcal{L}_{\alpha}, \mathcal{L}_{-\alpha}] \subseteq \mathcal{I}$ und $\mathcal{L}_{-\alpha} = [\mathcal{C}h_{\alpha}, \mathcal{L}_{-\alpha}] \subseteq \mathcal{I}$. Es folgt ebenfalls $\mathcal{L}_{(\alpha)} \subseteq \mathcal{I}$. ■

Es genügt offensichtlich, die regulären Unteralgebren der einfachen Lie-Algebren zu betrachten:

Satz 5.10 *Die regulären Unteralgebren einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra sind - bis auf Äquivalenz - genau alle Summen von regulären Unteralgebren der einfachen Ideale.* ■

Wir wenden uns nun den regulären *halbeinfachen* Unteralgebren zu.

Sei H eine Cartan-Unteralgebra in \mathcal{L} und Σ das zugehörige Wurzelsystem. Sei \mathcal{L}' eine bezüglich H reguläre halbeinfache Unteralgebra, definiert durch das Paar (H', Σ') . Wir wählen ein SEW π' in Σ' . Es ist klar, daß \mathcal{L}' durch die Einbettung $\pi' \subseteq \Sigma$ vollständig bestimmt ist. Man kann daher die Untersuchung der regulären halbeinfachen Unteralgebren auf die Untersuchung von Teilsystemen der Art $\pi' \subseteq \Sigma$ zurückführen. Diese Vorstellung wollen wir im folgenden formalisieren.

π -Systeme in einem Wurzelsystem

Eine Teilmenge $\pi \subseteq \Sigma$ heißt π -System in Σ , falls gilt

- ($\pi 1$) π ist linear unabhängig
- ($\pi 2$) $\alpha - \beta \notin \Sigma \quad \forall \alpha, \beta \in \pi$.

Zwei π -Systeme π, π' in Σ heißen *äquivalent*, falls es ein $\sigma \in \text{Ad } \Sigma$ mit $\pi' = \sigma\pi$ gibt. Ein π -System in Σ , welches H^* aufspannt, nennen wir *vollständig*. Zu den vollständigen π -Systemen in Σ gehören zum Beispiel die SEW; im allgemeinen gibt es aber noch mehr.

Jedes π -System in Σ ist gleichzeitig ein π -System in dem reellen Hilbert-Raum $H_{\mathbb{R}}^*$ im Sinne von Abschnitt 3.1. Es besitzt daher ein Dynkin-Diagramm. In Analogie zu der Situation bei den π -Systemen nennen wir ein π -System in Σ *irreduzibel*, falls sein Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist.

Sei π ein π -System in Σ . π erzeugt einen Unterraum $H_{\pi} := (\text{span}_{\mathbb{C}} \pi)^*$ von H und eine Teilmenge

$$\Sigma_{\pi}^{+} := \left\{ \sum_{\alpha \in \pi} n^{\alpha} \alpha : n^{\alpha} = 0, 1, 2, \dots \right\} \cap \Sigma, \quad \Sigma_{\pi} := \Sigma_{\pi}^{+} \cup (-\Sigma_{\pi}^{+})$$

von Σ . Sei \mathcal{L}_{π} die durch das Paar (H_{π}, Σ_{π}) definierte reguläre Unteralgebra.

⁴Definition siehe Gleichung (2.9)

Satz 5.11 Sei \mathcal{L} eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und H eine Cartan-Unteralgebra mit Wurzelsystem Σ .

- (a) Ist π ein π -System in Σ , dann ist \mathcal{L}_π eine reguläre halbeinfache Unteralgebra, H_π eine Cartan-Unteralgebra von \mathcal{L}_π , Σ_π das zugehörige Wurzelsystem und π ein SEW in Σ_π .
- (b) Jede bezüglich H reguläre halbeinfache Unteralgebra ist von der Form \mathcal{L}_π für ein gewisses π -System π in Σ .
- (c) Zwei π -Systeme π, π' in Σ sind genau dann äquivalent, wenn \mathcal{L}_π und $\mathcal{L}_{\pi'}$ als Unteralgebren von \mathcal{L} äquivalent sind.

BEWEIS:

zu (a): Nach Konstruktion erfüllt das Paar (H_π, Σ_π) die Bedingungen (H1)-(H3) aus Satz 5.9. Damit ist \mathcal{L}_π reguläre halbeinfache Unteralgebra, H_π Cartan-Unteralgebra und Σ_π Wurzelsystem. Schließlich ist π SEW, weil alle Elemente von Σ_π bezüglich der Basis π entweder sämtlich nichtnegative oder sämtlich nichtpositive ganzzahlige Koeffizienten haben.

zu (b): Sei \mathcal{L}' eine reguläre halbeinfache Unteralgebra, gegeben durch das Paar (H', Σ') . Sei π' ein SEW in Σ' . Dann erfüllt π' auf jeden Fall die Bedingung $(\pi 1)$. Gäbe es $\alpha, \beta \in \pi'$ mit $\alpha - \beta \in \Sigma$, dann folgte $-\beta \in \Sigma'$ aus (H2) und $\alpha - \beta \in \Sigma'$ aus (H1) (Widerspruch zu Satz 2.9 (a)). Damit erfüllt π' auch die Bedingung $(\pi 2)$.

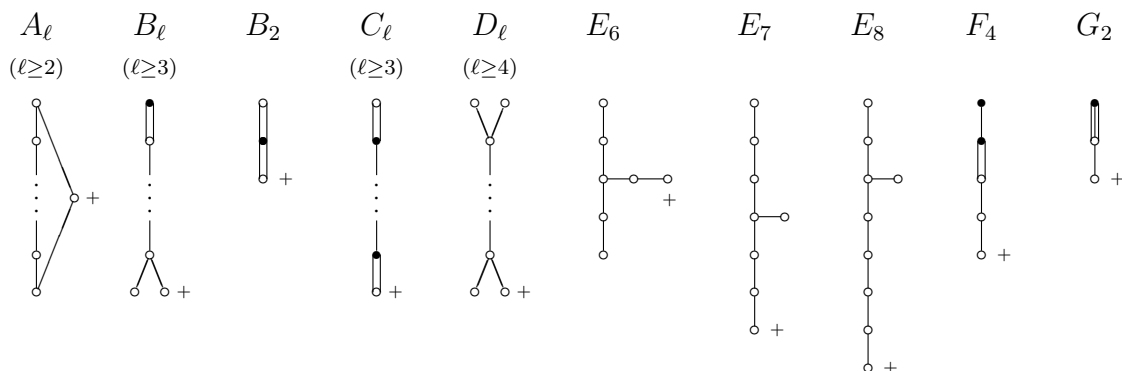
zu (c): Man überzeugt sich zuerst davon, daß \mathcal{L}_π und $\mathcal{L}_{\pi'}$ genau dann äquivalent sind, wenn es einen inneren Automorphismus U von \mathcal{L} mit der Eigenschaft $UH = H$ gibt, so daß $\mathcal{L}_{\pi'} = U\mathcal{L}_\pi$. Für innere Automorphismen U mit $UH = H$ gilt $\mathcal{L}_{U^*\pi} = U^{-1}\mathcal{L}_\pi$: Dies folgt unmittelbar aus $H_{U^*\pi} = U^{-1}H_\pi$, $\Sigma_{U^*\pi} = U^*\Sigma_\pi$ und $\mathcal{L}_{U^*\alpha} = U^{-1}\mathcal{L}_\alpha \forall \alpha \in \Sigma$ (vgl. Lemma 4.2 (e)). Satz 2.16 liefert dann die Behauptung. ■

Erweiterte π -Systeme

Sei π ein geordnetes irreduzibles π -System in Σ und sei Σ_π mit der entsprechenden lexikografischen Ordnung versehen. Bezeichne β die kleinste Wurzel aus Σ_π . Die Teilmenge $\pi \cup \{\beta\}$ von Σ heißt *Erweiterung* von π . Das Entfernen einer Wurzel aus der Erweiterung von π nennen wir *Elementarumwandlung* von π .

Eine Elementarumwandlung eines beliebigen, nicht notwendig irreduziblen π -Systems in Σ sei eine Elementarumwandlung an einer der irreduziblen Komponenten von π .

Die Erweiterungen der π -Systeme in Σ kann man ebenfalls durch ein Dynkin-Diagramm darstellen. Die hinzugefügte Wurzel kennzeichnen wir dabei mit "+". In der folgenden Tabelle sind die Erweiterungen der irreduziblen π -Systeme aufgelistet:



BEMERKUNG: A_1 schließen wir aus unserer Betrachtung aus, da es sowieso keine echten halbeinfachen Unteralgebren enthält.

BEWEIS: Die kleinste Wurzel aus Σ_π ist gerade $-\Lambda(\text{ad}_{\mathcal{L}_\pi})$. $\Lambda(\text{ad}_{\mathcal{L}_\pi})$ kann man zum Beispiel aus Satz 4.10 ablesen und so die Anzahl der Linien zwischen der hinzugefügten Wurzel und den restlichen Elementen von π berechnen. ■

Satz 5.12 *Sei π ein geordnetes π -System in Σ . Durch eine Elementarumwandlung entsteht aus π wieder ein π -System $\tilde{\pi}$. Dabei gilt $\Sigma_{\tilde{\pi}} \subseteq \Sigma_\pi$ und $\mathcal{L}_{\tilde{\pi}} \subseteq \mathcal{L}_\pi$.*

BEWEIS: Wir können voraussetzen, daß π irreduzibel ist. $\tilde{\pi}$ erfüllt nach Konstruktion die Bedingung $(\pi 2)$. Sei β die kleinste Wurzel aus Σ_π . Um einzusehen, daß $\tilde{\pi}$ auch linear unabhängig ist, zeigen wir, daß in der Zerlegung $\beta = \sum_{\alpha \in \pi} n^\alpha \alpha$ sämtliche Koeffizienten verschieden von Null sind: Wäre das nicht der Fall, so fänden wir Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1 \in \pi$ mit $n^{\alpha_0} = 0$, $n^{\alpha_1} \neq 0$ und $(\alpha_0, \alpha_1) \neq 0$. Da sowohl n^α als auch die Zahlen (α, α_0) für $\alpha \neq \alpha_0$ nichtpositiv sind, wäre

$$\frac{2(\beta, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} = \sum_{\substack{\alpha \in \pi_j \\ \alpha \neq \alpha_0}} n^\alpha \frac{2(\alpha, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} \geq n^{\alpha_1} \frac{2(\alpha_1, \alpha_0)}{(\alpha_0, \alpha_0)} > 0$$

und wir könnten die α_0 -Folge durch β nach unten fortsetzen (Widerspruch zu $(\pi 2)$).

Die Relationen $\Sigma_{\tilde{\pi}} \subseteq \Sigma_\pi$ und $\mathcal{L}_{\tilde{\pi}} \subseteq \mathcal{L}_\pi$ schließlich folgen daraus, daß $\tilde{\pi}$ offensichtlich ein π -System in Σ_π ist. ■

Klassifizierung der regulären halbeinfachen Unteralgebren

Ausgehend von einem SEW π_0 kann man durch Elementarumwandlungen und bloßes Entfernen von Elementen von π_0 eine gewisse Anzahl von π -Systemen erzeugen. Der folgende Satz besagt, daß man auf diese Weise *alle* π -Systeme (modulo Äquivalenz) erhält.

Satz 5.13 *Sei π_0 ein SEW in Σ . Jedes π -System in Σ ist äquivalent zu einem π -System, das sich aus π_0 durch Elementarumwandlungen und durch das Entfernen von Wurzeln (in beliebiger Reihenfolge) ergibt.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst

Lemma 5.14 *Jedes π -System in Σ ist in einem vollständigen π -System in Σ enthalten.*

BEWEIS: Sei π ein π -System in Σ . Ist es nicht vollständig, dann gilt $\Sigma \setminus \Sigma_\pi \neq \emptyset$ und wir finden ein $\beta \in \Sigma \setminus \Sigma_\pi$ mit $\beta - \alpha \notin \Sigma \ \forall \alpha \in \pi$. Fügen wir β zu π hinzu, ergibt sich wieder ein π -System in Σ . Wir iterieren die Argumentation solange, bis π vollständig ist.

Jedes π -System in Σ geht also durch Entfernen von Wurzeln aus einem vollständigen π -System hervor. Daher genügt es, die Behauptung des Satzes für die vollständigen π -Systeme zu beweisen.

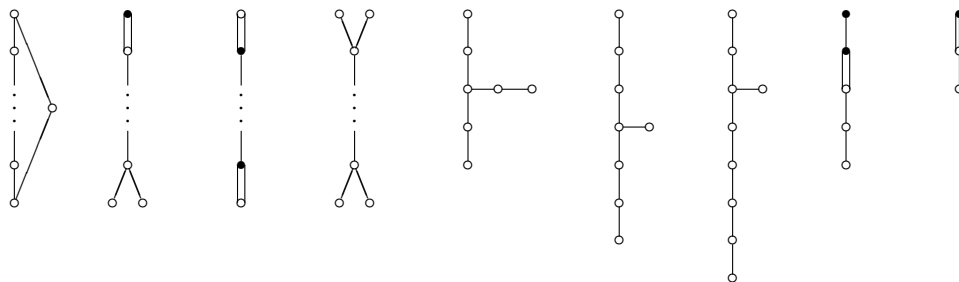
Lemma 5.15 *Jedes vollständige π -System π in Σ , welches kein SEW ist, kann durch eine Elementarumwandlung aus einem π -System $\tilde{\pi}$ mit der Eigenschaft $\Sigma_\pi \subset \Sigma_{\tilde{\pi}}$ (strenge Inklusion) erzeugt werden.*

BEWEIS: Sei π ein vollständiges π -System in Σ . Ist π kein SEW, so gibt es Wurzeln in Σ , die sich nicht als ganzzahlige Linearkombinationen von π schreiben lassen. Sei β

die kleinste dieser Wurzeln. Wir bilden $\pi^+ := \pi \cup \{\beta\}$. Bezeichne π_β^+ diejenige irreduzible Komponente von π^+ , die β enthält. Die Teilmenge $\pi_\beta^+ \subseteq \Sigma$ erfüllt $(\pi 2)$ und damit insbesondere

$$\frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha', \alpha')} \leq 0 \text{ und ganzzahlig } \forall \alpha, \alpha' \in \pi_\beta^+ . \quad (*)$$

Außerdem ist ihr Dynkin-Diagramm zusammenhängend. Analog zur Klassifizierung der π -Systeme im Abschnitt 3.1 überzeugt man sich davon, daß jede Teilmenge eines Euklidischen Raumes, die der Bedingung $(*)$ genügt und deren Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist, zu einer der folgenden Klassen gehört:



(die homogenen Folgen im zweiten bis vierten Diagramm von links können bis auf einen Punkt zusammenschrumpfen). Vergleichen wir mit der Tabelle der erweiterten π -Systeme auf Seite 89, so sehen wir, daß jede dieser Teilmengen - also auch π_β^+ - die Erweiterung eines bestimmten irreduziblen π -Systems ist. Es gibt also eine Wurzel $\alpha_0 \in \pi_\beta^+$, so daß

- $\pi_\beta^+ \setminus \alpha_0$ ein irreduzibles π -System und
- π_β^+ die Erweiterung von $\pi_\beta^+ \setminus \alpha_0$ ist.

Damit entsteht π aus dem π -System $\tilde{\pi} := \pi^+ \setminus \{\alpha_0\}$ durch eine Elementarumwandlung der irreduziblen Komponente von β .

Nach Satz 5.12 gilt dann $\Sigma_\pi \subseteq \Sigma_{\tilde{\pi}}$. Im Falle der Gleichheit wäre $\beta \notin \Sigma_{\tilde{\pi}}$. Dies impliziert $\beta = \alpha_0$. Die Wurzel α_0 ist aber Element von $\Sigma_{\tilde{\pi}}$ (Widerspruch). Daher muß Σ_π echt in $\Sigma_{\tilde{\pi}}$ enthalten sein.

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes:

Sei π ein vollständiges π -System in Σ . Durch iterative Anwendung von Lemma 5.15 erhalten wir ein SEW $\tilde{\pi}_0$. Nach Satz 2.21 gibt es eine Transformation $\sigma \in \text{Ad}(\Sigma)$ mit $\pi_0 = \sigma \tilde{\pi}_0$. Damit entsteht $\sigma\pi$ aus π_0 durch Elementarumwandlungen. ■

Zwei verschiedene π -Systeme in Σ , die man auf die im Satz beschriebene Weise konstruiert, können durchaus äquivalent sein. Zur vollständigen Klassifizierung fehlt also noch die genaue Untersuchung der Wirkung der Weyl-Gruppe $\text{Ad}(\Sigma)$ auf den π -Systemen in Σ . Diese wollen wir hier nicht durchführen; wir zitieren nur das Ergebnis [Dy, §II.5, n° 17]:

Satz 5.16 Die folgende Tabelle enthält die Äquivalenzklassen der regulären halbeinfachen Unteralgebren der klassischen einfachen Lie-Algebren:

$A_\ell (\ell \geq 1)$	$A_{k_1} \oplus \dots \oplus A_{k_s}$	$\sum_{j=1}^s (k_j + 1) \leq \ell + 1$
$B_\ell (\ell \geq 2)$	$A_{k_1} \oplus \dots \oplus A_{k_s} \oplus D_{m_1} \oplus \dots \oplus D_{m_r} \oplus B_m$	$\sum_{j=1}^s (k_j + 1) + \sum_{j=1}^r m_j + m \leq \ell$
$C_\ell (\ell \geq 3)$	$A_{k_1} \oplus \dots \oplus A_{k_s} \oplus C_{l_1} \oplus \dots \oplus C_{l_r}$	$\sum_{j=1}^s (k_j + 1) + \sum_{j=1}^r l_j \leq \ell$
$D_\ell (\ell \geq 4)$	$A_{k_1} \oplus \dots \oplus A_{k_s} \oplus D_{m_1} \oplus \dots \oplus D_{m_r}$	$\sum_{j=1}^s (k_j + 1) + \sum_{j=1}^r m_j \leq \ell$

$(k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s \geq 0, \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r \geq 0, \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \geq 1, \quad m \geq 0).$

BEMERKUNGEN:

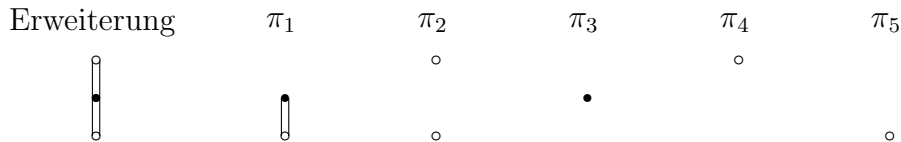
1. Man beachte folgende Identifizierungen: $A_0 = B_0 = C_0 = \{0\}$, $B_1 = \bullet$, $C_1 = \circ$, $D_1 = A_1$, $D_2 = A_1 \oplus A_1$, $D_3 = A_3$.
2. Die Tabelle der regulären halbeinfachen Unteralkgebren der exceptionellen Lie-Algebren findet man ebenfalls in [Dy, §II.5, n° 17].

Beispiele

Wir wollen uns an drei Beispielen anschauen, wie der in Satz 5.13 bereitgestellte Kalkül funktioniert.

(A_ℓ) Aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von $A_ℓ$ ist ersichtlich, daß beliebige Elementarumwandlungen nur wieder SEW erzeugen, die natürlich äquivalent sind und die gleiche Unteralkgebra, nämlich $A_ℓ$ selbst, definieren. Die regulären halbeinfachen Unteralkgebren erhält man also durch das Entfernen von Wurzeln. Sie haben aus diesem Grunde die Gestalt $A_{l_1} \oplus A_{l_2} \oplus \dots \oplus A_{l_m}$. Man überzeugt sich davon, daß dabei $\sum_i (l_i + 1) \leq \ell + 1$ gelten muß. Für A_4 ergeben sich zum Beispiel die Unteralkgebren A_4 , A_3 , $A_2 \oplus A_1$, A_2 , $A_1 \oplus A_1$, A_1 .

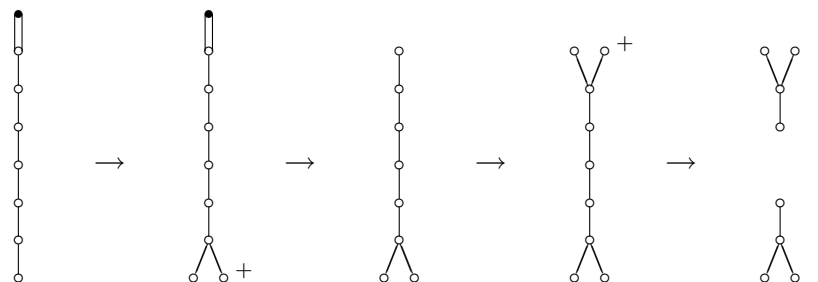
(B₂) Wir erzeugen alle möglichen π -Systeme:



Die π -Systeme π_1, \dots, π_4 sind paarweise inäquivalent. π_4 und π_5 dagegen sind äquivalent: dies prüft man zum Beispiel durch Berechnung der linearen Äquivalenzklassen (die bei $B_ℓ$ mit den Äquivalenzklassen übereinstimmen) der Unteralkgebren \mathcal{L}_{π_4} und \mathcal{L}_{π_5} mit Hilfe der definierenden Darstellung τ_1 von B_2 .

Die regulären halbeinfachen Unteralkgebren von B_2 sind also B_2 , $A_1 \oplus A_1$, A_1 , B_1 . Man beachte, daß es zwei nicht äquivalente reguläre Unteralkgebren vom Typ A_1 gibt: A_1 (von einer langen Wurzel erzeugt) und B_1 (von einer kurzen Wurzel erzeugt). Diese haben auch verschiedene Indizes.

(B_ℓ) Aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm lassen sich durch Entfernen von Wurzeln Diagramme der A , B , D -Serie und direkte Summen davon erzeugen. An einem D - oder B -Diagramm können wir dann erneut eine Elementarumwandlung vornehmen und weitere D -Unteralkgebren finden. So passen zum Beispiel in B_8 zwei reguläre D_4 -Unteralkgebren hinein:



Andererseits kann man direkt aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm ablesen, daß $D_ℓ$ keine regulären B -Unteralkgebren enthält.

Kapitel 6

Anwendungen in Eichfeldtheorien

In diesem Teil, der aus Originalarbeiten (z. B. [12]) von G. Rudolph und I. Volobuev zusammengestellt ist, wollen wir uns ansehen, wie man die Theorie der Lie-Algebren auf die Lösung gruppentheoretischer Probleme der Teilchenphysik anwenden kann. Dazu betrachten wir den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung im $SU(5)$ -Modell der großen Unifizierung und die Konstruktion des $SU(5) \times U(1)$ -Modells mittels Dimensionsreduktion. Wir vereinbaren $(-, +, +, +)$ als Signatur der Minkowski-Metrik. Irreduzible Darstellungen bezeichnen wir, wie in der physikalischen Literatur üblich, durch ihre Dimension.

6.1 Das $SU(5)$ -Modell

In diesem Modell mit der inneren Symmetriegruppe $SU(5)$, die wir in der fundamentalen Darstellung als 5×5 -Matrizen realisieren, treten die folgenden Felder auf: das Eichfeld $A_\mu(x)$, das 'leichte' Higgs-Feld Φ in der Darstellung $\underline{5}$, das 'schwere' Higgs-Feld H in der Darstellung $\underline{24}$ sowie ein Spinorfeld Ψ in der Darstellung $\underline{5}^* + \underline{10}$. Der Lagrangian des Modells hat die Gestalt [1]

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{8g_u^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi + A^\mu \Phi) + \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} [(\partial_\mu H + [A_\mu, H])(\partial^\mu H + [A^\mu, H])] - V(\Phi, H) + L_f(A_\mu, \Phi, \Psi), \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei das Higgs-Potential gegeben ist durch

$$\begin{aligned} V(\Phi, H) = & -\frac{\mu^2}{2}(\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{M^2}{2} \text{tr}(H^2) + \\ & + \frac{a}{4}(\text{tr}(H^2))^2 + \frac{b}{2} \text{tr}(H^4) + \alpha(\Phi^\dagger \Phi) \text{tr}(H^2) + \beta \Phi^\dagger H^2 \Phi. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Der fermionische Teil $L_f(A_\mu, \Phi, \Psi)$ beinhaltet den freien Spinorfeld-Lagrangian sowie die Wechselwirkung des Spinorfeldes mit dem Eichfeld und dem leichten Higgs-Feld Φ . Wir spezifizieren ihn nicht, da wir ihn für unsere Betrachtungen nicht benötigen. Wir weisen darauf hin, daß wir die geometrische Normierung verwenden, in der die Kopplungskonstante im Nenner auftaucht. Um zur physikalischen Normierung überzugehen, muß man gemäß $A_\mu \mapsto g_u A_\mu$ umskalieren.

Genügen die Parameter des Higgs-Potentials den Bedingungen

$$b > 0, \quad a > -7b/15, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0, \quad \lambda > 0,$$

so wird die $SU(5)$ -Symmetrie zu $SU(3) \times U(1)$ gebrochen. Es ist ziemlich aufwendig, das Minimum des Higgs-Potentials, den Vakuum-Wert des Higgs-Feldes sowie die Massen, die Kopplungskonstanten und den Weinberg-Winkel eines Modells explizit zu berechnen. Möchte man nur wissen, ob das betrachtete Modell die richtige Symmetriebrechung und einen vernünftigen Wert für den Weinberg-Winkel liefern kann, so kann man sich viel Arbeit ersparen, indem man die Theorie der Lie-Algebren anwendet. Wir wollen das am Beispiel des $SU(5)$ -Modells verdeutlichen.

Dazu gehen wir über zur Komplexifizierung A_4 . Wir schreiben den Lagrangian des Eichfeldes mit Hilfe der kanonisch normierten ISBLF von A_4 um (vgl. S. 59):

$$\frac{1}{8g_u^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \frac{5}{4g_u^2} \langle F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} \rangle_{A_4}. \quad (6.3)$$

Die Symmetriebrechung im $SU(5)$ -Modell kann man sich als in zwei Schritten ablaufend vorstellen: Zuerst bricht das schwere Higgs-Feld $SU(5)$ zu $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, dann das leichte Higgs-Feld die elektroschwache Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$ zu $U(1)$. Durch die folgende Verzweigungsregel der definierenden Darstellung $\underline{5}$ von $SU(5)$ (vgl. Abschnitt 5.2) wird eine Untergruppe des Typs $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ von $SU(5)$ ausgezeichnet:

$$\underline{5} \rightarrow (\underline{3}, \underline{1})(-\frac{1}{3}) + (\underline{1}, \underline{2})(\frac{1}{2}). \quad (6.4)$$

Die entsprechende Verzweigungsregel der adjungierten Darstellung von $SU(5)$ lautet

$$\begin{aligned} \underline{24} = \underline{5}^* \otimes \underline{5} &\rightarrow (\underline{8}, \underline{1})(0) + (\underline{3}, \underline{2})(-\frac{5}{6}) + \\ &+ (\underline{3}^*, \underline{2})(\frac{5}{6}) + (\underline{1}, \underline{3})(0) + (\underline{1}, \underline{1})(0) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Es ist klar, daß $(\underline{8}, \underline{1})(0)$ zur Lie-Algebra $su(3)$, $(\underline{1}, \underline{3})(0)$ zur Lie-Algebra $su(2)$ und $(\underline{1}, \underline{1})(0)$ zur Lie-Algebra $u(1)$ korrespondiert.

Da die Zerlegung der Einschränkung von $\underline{24}$ auf $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ in irreduzible Komponenten nur eine triviale eindimensionale Darstellung enthält, kann das Higgs-Feld in dieser Darstellung die $SU(5)$ -Symmetrie wirklich zu $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ brechen. Allgemein gilt: Enthält die Einschränkung einer Darstellung δ von G auf eine Untergruppe H nur *eine* triviale Komponente, dann haben alle Punkte des entsprechenden Unterraumes den Orbittyp G/H . Das Higgs-Feld in der Darstellung δ kann dann die Symmetriegruppe G zur Untergruppe H brechen. Ist δ die adjungierte Darstellung, dann muß man beachten, daß H immer die Untergruppe $U(1)$, deren Lie-Algebra der Darstellungsraum der trivialen Komponente der adjungierten Darstellung ist, enthält.

Das Higgs-Potential (6.2) ist so konstruiert, daß es minimal wird, wenn das schwere Higgs-Feld H Werte im Unterraum der trivialen Darstellung $(\underline{1}, \underline{1})(0)$ von $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ nimmt. Dieser Vakuum-Wert hat in der fundamentalen Darstellung von $su(5)$ die Gestalt $H_0 = \text{diag}(\nu, \nu, \nu, -\frac{3}{2}\nu, -\frac{3}{2}\nu)$.

Setzen wir ihn in das Higgs-Potential (6.2) ein, dann erhalten alle Komponenten der Higgs-Felder Φ und H bezüglich der Zerlegungen (6.4) und (6.5) – mit Ausnahme der

Komponente des Feldes Φ in der Darstellung $(\underline{1}, \underline{2})(\frac{1}{2})$, welche wir mit ϕ bezeichnen – Massen der Unifizierungsskala M . Der Selbstwechselwirkungsterm von ϕ hat die Gestalt $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} ((\phi^\dagger \phi) - v_0)^2$, wobei v_0 durch die ursprünglichen Parameter des Higgs-Potentials (6.2) ausgedrückt werden kann.

Bei den Eichfeldern ist klar, daß diejenigen, die zu $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ korrespondieren, masselos bleiben, während die Eichfelder zu den Darstellungen $(\underline{3}, \underline{2})(-\frac{5}{6})$ und $(\underline{3}^*, \underline{2})(\frac{5}{6})$ (die sogenannten 'Leptoquarks') Massen auf der Unifizierungsskala erhalten.

Im weiteren wollen wir nur noch den Sektor der leichten Felder betrachten. Dieser stimmt mit dem Standardmodell überein. Wir übernehmen die im Standardmodell übliche Notation:

Bezeichne G_μ die $SU(3)$ -Komponente des Eichfeldes (das Gluonen-Feld) und $G_{\mu\nu}$ den zugehörige Feldstärketensor. Da die A_2 -Unteralgebra $su(3)$ in der A_4 -Algebra $su(5)$ den Index 1 hat (vgl. Abschnitt 5.3), gilt

$$\frac{5}{4g_u^2} \langle G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu} \rangle_{A_4} = \frac{5}{4g_u^2} \langle G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu} \rangle_{A_2} = \frac{5}{24g_u^2} \text{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) = \frac{1}{8g_s^2} \text{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \quad (6.6)$$

mit

$$g_s^2 = \frac{3}{5} g_u^2. \quad (6.7)$$

Wir betonen, daß jetzt die Spur in der adjungierten Darstellung von A_2 genommen wird. Die $SU(2)$ -Komponente des Eichfeldes bezeichnen wir mit W_μ und deren Feldstärke mit $W_{\mu\nu}$. Die betrachtete A_1 -Unteralgebra $su(2)$ in A_4 hat ebenfalls den Index 1, so daß der Lagrangian der $SU(2)$ -Komponente zu

$$\frac{5}{4g_u^2} \langle W_{\mu\nu}, W^{\mu\nu} \rangle_{A_4} = \frac{5}{4g_u^2} \langle W_{\mu\nu}, W^{\mu\nu} \rangle_{A_1} = \frac{5}{24g_u^2} \text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) = \frac{1}{8g^2} \text{tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) \quad (6.8)$$

umgeschrieben werden kann. Hierbei ist die Konstante g durch

$$g^2 = \frac{2}{5} g_u^2 \quad (6.9)$$

definiert, und die Spur muß in der adjungierten Darstellung von A_1 genommen werden. Mit B_μ bzw. $B_{\mu\nu}$ schließlich bezeichnen wir die $U(1)$ -Komponente bzw. deren Feldstärketensor. Infinitesimaler Generator Y dieser Untergruppe ist die halbe schwache Hyperladung des Weinberg-Salam-Modells. Die Eigenwerte von Y in der adjungierten Darstellung kann man aus (6.5) ablesen. Es ergibt sich

$$10 \langle Y, Y \rangle = \text{tr}(YY) = \frac{25}{36} 12 = \frac{25}{3}, \text{ d. h. } \langle Y, Y \rangle = \frac{5}{6}. \quad (6.10)$$

Der Lagrangian des B -Feldes ist folglich

$$\frac{5}{4g_u^2} \langle iY B_{\mu\nu}, iY B^{\mu\nu} \rangle = -\frac{5}{4g_u^2} \frac{5}{6} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4g'^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (6.11)$$

mit

$$g'^2 = \frac{6}{25} g_u^2. \quad (6.12)$$

Damit erhält man aus dem unifizierten $SU(5)$ -Modell den folgenden Lagrangian für den bosonischen Sektor des Standardmodells:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8g_s^2} \text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \frac{1}{8g^2} \text{tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4g'^2} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \\ & - (\partial_\mu\phi + W_\mu\phi + \frac{i}{2}B_\mu\phi)^\dagger (\partial^\mu\phi + W^\mu\phi + \frac{i}{2}B^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4} ((\phi^\dagger\phi) - v_0)^2 . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die Verhältnisse der Kopplungskonstanten

$$\frac{g_s^2}{g^2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{g'^2}{g^2} = \frac{3}{5} \quad (6.14)$$

sind durch die ursprüngliche $SU(5)$ -Symmetrie fixiert.

Für die zweite Stufe der spontanen Symmetriebrechung ist das Higgs-Feld ϕ verantwortlich. Dieses hat einen von Null verschiedenen Vakuum-Erwartungswert, der die $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie zu $U(1)_{em}$ bricht. Dieser Prozeß kann folgendermaßen beschrieben werden: Durch die Verzweigungsregel

$$\underline{2} \rightarrow \underline{1}(\frac{1}{2}) + \underline{1}(-\frac{1}{2}) \quad (6.15)$$

der definierenden Darstellung $\underline{2}$ von $SU(2)$ und die korrespondierende Verzweigungsregel

$$\underline{3} \rightarrow \underline{1}(1) + \underline{1}(0) + \underline{1}(-1) \quad (6.16)$$

der adjungierten Darstellung $\underline{3}$ wird eine $U(1)$ -Untergruppe von $SU(2)$ identifiziert. Sei T_3 ihr infinitesimaler Generator. Aus (6.16) lesen wir

$$\text{tr}(T_3T_3) = 2 \quad (6.17)$$

ab. Wir definieren den Operator der elektrischen Ladung Q durch

$$Q = T_3 + Y . \quad (6.18)$$

Wir erinnern uns, daß das Higgs-Feld ϕ seine Werte in der Darstellung $\underline{2}(\frac{1}{2})$ von $SU(2) \times U(1)$ nimmt. Seine Komponenten in den Darstellungen $\underline{1}(\frac{1}{2})$ bzw. $\underline{1}(-\frac{1}{2})$ (vgl. (6.15)) nennen wir φ_1 bzw. φ_2 . Es ist leicht zu sehen, daß die Komponente φ_1 zum Eigenwert 1 von Q gehört und φ_2 zum Eigenwert 0. φ_2 ist also ein neutrales Feld. Es kann einen von Null verschiedenen Vakuum-Erwartungswert besitzen, ohne die Ladungserhaltung zu verletzen.

Als nächstes bezeichnen wir die Komponente des Feldes W_μ in der Darstellung $\underline{1}(0)$ (vgl. (6.16)) mit W_μ^3 . Es ist klar, daß von den Eichfeldern des Standardmodells nur G_μ , B_μ und W_μ^3 neutral sind. Von diesen sind wiederum nur B_μ und W_μ^3 an φ_2 gekoppelt und können damit in der zweiten Stufe der spontanen Symmetriebrechung eine Masse erhalten. Wir gehen zur physikalischen Normierung über, indem wir die Felder gemäß $W_\mu^3 \rightarrow gW_\mu^3$, $B_\mu \rightarrow g'B_\mu$ reskalieren und schreiben den Wechselwirkungsterm der reskalierten Felder mit φ_2 auf:

$$\left((-\frac{i}{2}gW_\mu^3 + \frac{i}{2}g'B_\mu)\varphi_2 \right)^\dagger \left(-\frac{i}{2}gW^{3\mu} + \frac{i}{2}g'B^\mu \right) \varphi_2 . \quad (6.19)$$

Wir sehen: Besitzt φ_2 einen Vakuum-Erwartungswert $\neq 0$, dann entstehen Masseterme für B_μ , W_μ^3 und ein gemischter Term. Um die Wechselwirkung zu diagonalisieren, führen wir eine orthogonale Transformation

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu \\ W_\mu^3 &= \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu \end{aligned} \quad (6.20)$$

durch – diese läßt die freien Terme des Lagrangians invariant – und wählen θ_W (den 'Weinberg-Winkel') so, daß das Feld A_μ nach dem Einsetzen von (6.20) in (6.19) verschwindet. Damit ergibt sich für θ_W die Gleichung

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (6.21)$$

(6.14) liefert $\tan^2 \theta_W = 3/5$, d. h.

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}. \quad (6.22)$$

Dieser Wert des Weinberg-Winkels im unifizierten $SU(5)$ -Modell ist wohlbekannt. Z_μ ist das Feld der massiven neutralen Z -Bosonen, der Quanten der schwachen Wechselwirkung, während A_μ nach der Symmetriebrechung masselos bleibt und mit dem elektromagnetischen Feld identifiziert wird. Aus der Wechselwirkung zwischen A_μ und φ_1 lesen wir für die elektromagnetische Kopplungskonstante

$$e = g \sin \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (6.23)$$

ab. Damit lassen sich die Kopplungskonstanten des Modells auf folgende Weise durch die Feinstrukturkonstante α ausdrücken:

$$\frac{g_s^2}{4\pi} = 4\alpha, \quad \frac{g^2}{4\pi} = \frac{8}{3}\alpha \quad (6.24)$$

mit der 'halbschwachen Kopplungskonstante' g . Diese Verhältnisse reflektieren die ursprüngliche Unifizierungs-Symmetrie und sind für die entsprechende Energieskala gültig.

6.2 Das $SU(5) \times U(1)$ -Modell

In diesem Beispiel wollen wir das $SU(5) \times U(1)$ -Modell, welches in der Literatur unter dem Namen 'flipped $SU(5)$ -grand unified model' bekannt ist, mit Hilfe der Methode der Dimensionsreduktion konstruieren. Wie wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen haben, besitzen unifizierte Modelle, wenn man sie 'von Hand' baut, zu viele freie Parameter, was natürlich ihren Vorhersagewert einschränkt. Deshalb versucht man, Möglichkeiten zu finden, die Anzahl der freien Parameter in solchen Modellen zu reduzieren. Eine Möglichkeit besteht zum Beispiel darin, die Existenz zusätzlicher Raum-Zeit-Dimensionen zu postulieren. Wenn wir annehmen, daß unsere Raum-Zeit zusätzliche raumartige Dimensionen besitzt, deren Ausdehnung mikroskopisch klein ist, dann können wir verschiedenartige Wechselwirkungen und Felder zu einer bzw. einem universellen vereinen. Enthält die multidimensionale Theorie zum Beispiel nur Eichfelder, so wird die effektive vierdimensionale

Theorie sowohl Eich- als auch Skalarfelder beinhalten, wobei letztere Selbstwechselwirkungsterme in vierter Potenz besitzen und nicht selten zu spontaner Symmetriebrechung Anlaß geben. Den Übergang von der multidimensionalen zur vierdimensionalen Theorie bewältigt man in diesem Fall dadurch, daß man an erstere eine zusätzliche (raum-zeitliche) Symmetriebedingung stellt.

In Eichtheorien mit Raum-Zeit-Symmetrien betrachtet man die Klasse der 'symmetrischen Eichfelder', d. h. derjenigen Eichfelder, die bis auf Eichtransformationen invariant unter der gegebenen Raum-Zeit-Symmetrie sind. Es zeigt sich, daß der K -symmetrische Teil einer Eichtheorie auf dem multidimensionalen Universum $E = M \times K/H$ auf konsistente Weise zu einer Eichtheorie auf der physikalischen Raum-Zeit M reduziert werden kann. Das entsprechende Verfahren ist unter dem Namen 'Dimensionsreduktion symmetrischer Eichfelder' oder 'coset space dimensional reduction' (CSDR) bekannt (vgl. [2], [3], [6] und Referenzen darin). Da solche reduzierten Theorien nur wenige freie Parameter enthalten, ist es sinnvoll, zu versuchen, mit dieser Methode realistische Modelle zu konstruieren, insbesondere solche der großen Unifizierung. In dieser Richtung wurden zahlreiche Versuche unternommen [8], [9], [10]. Dabei zeigte sich, daß es zwar recht einfach ist, die richtigen Higgs-Multipletts zu bekommen, aber sehr schwer, Higgs-Potentiale zu erhalten, die zur korrekten Symmetriebrechung führen und eine Massenhierarchie erlauben. Hier präsentieren wir eine Lösung dieses Problems, indem wir ein realistisches unifiziertes Modell mit der Eichgruppe $SU(5) \times U(1)$ konstruieren. Zuerst wollen wir aber kurz die Methode der Dimensionsreduktion erläutern.

Dimensionsreduktion und Modellbildung

Wir betrachten eine reine Eichtheorie mit kompakter Strukturgruppe G auf einem multidimensionalen Universum E . Auf E wirke die kompakte Lie-Gruppe K

$$\delta : K \times E \mapsto E, \quad (6.25)$$

und zwar so, daß jeder Punkt den Stabilisator H hat. Sei M der Orbitraum dieser Wirkung. E hat dann die kanonische Form

$$E = M \times K/H \quad (6.26)$$

mit der natürlichen linken K -Wirkung auf K/H . Wir wollen E und K so wählen, daß M gerade die vierdimensionale Raum-Zeit ergibt. Sei E mit einer pseudo-Riemannschen Metrik

$$g = \eta \oplus \gamma, \quad \text{sign}(g) = (-, +, \dots, +) \quad (6.27)$$

(η eine Metrik auf M , γ eine K -invariante Metrik auf K/H) versehen. Es gilt

$$\delta_k^* g = g. \quad (6.28)$$

Für Räume der Form (6.26) ist es leicht, alle Hauptfaserbündel $P(E, G)$ über E mit Strukturgruppe G zu bestimmen, in denen die K -Wirkung (6.25) auf E zu Automorphismen des Bündels P geliftet werden kann. Solche Bündel stehen in 1:1-Korrespondenz [4] zu Paaren (λ, \hat{P}) , wobei

$$\lambda : H \rightarrow G \quad (6.29)$$

ein Morphismus von Lie-Gruppen und \hat{P} ein Hauptfaserbündel über M mit der reduzierten Strukturgruppe $C := C(\lambda(H))$ (Zentralisator von $\lambda(H)$ in G) ist. Den natürlichen Lift von (6.25) in ein solches Bündel bezeichnen wir mit

$$\sigma : K \times P \mapsto P. \quad (6.30)$$

Ein K -invariantes Eichfeld ist eine Zusammenhangsform ω auf P , die

$$\sigma_k^* \omega = \omega \quad (6.31)$$

erfüllt.

Seien \mathfrak{G} , \mathfrak{K} bzw. \mathfrak{H} die Lie-Algebren von G , K bzw. H . Fixiert man ein invariantes Skalarprodukt auf der kompakten Lie-Algebra \mathfrak{K} , dann erfüllt das orthogonale Komplement $\mathfrak{M} := \mathfrak{H}^\perp$ die Bedingung $[\mathfrak{H}, \mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}$, d. h. die Zerlegung

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M} \quad (6.32)$$

ist reduktiv. Man kann zeigen [5], daß sich die K -invarianten Zusammenhangsformen auf P in 1:1-Korrespondenz zu Paaren $(\hat{\omega}, \phi)$ befinden, wobei $\hat{\omega}$ eine Zusammenhangsform auf \hat{P} und ϕ eine Abbildung

$$\phi : \hat{P} \mapsto \mathfrak{M}^* \otimes \mathfrak{G} \quad (6.33)$$

ist, die für alle $h \in H$

$$\text{Ad } \lambda(h) \cdot \phi(\hat{p}) = \phi(\hat{p}) \cdot \text{Ad } h \quad (6.34)$$

erfüllt. ($\text{Ad } \lambda(\cdot)$ bedeutet die Einschränkung $\text{Ad } G \downarrow \lambda(H)$ und $\text{Ad}(\cdot)$ die Einschränkung $\text{Ad } K \downarrow_H (\mathfrak{M})$). Die infinitesimale Version dieser Gleichung lautet

$$\text{ad } \tau(h) \cdot \phi(\hat{p}) = \phi(\hat{p}) \cdot \text{ad } h \quad (6.35)$$

($h \in \mathfrak{H}$, $\tau : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ die Tangentialabbildung an λ im Einselement der Gruppe). Aufgrund der K -Invarianz induziert die reine Yang-Mills-Wirkung auf P die folgende Wirkung auf \hat{P} [5]

$$S = \frac{1}{\hat{g}^2} \int_{\hat{P}} \left(\langle \langle \hat{\Omega}, \hat{\Omega} \rangle \rangle_{(1)} + \frac{1}{2} \langle \langle D\phi, D\phi \rangle \rangle_{(2)} + V(\phi) \right) dv_{\hat{P}}. \quad (6.36)$$

Dabei ist $\hat{\Omega}$ die Krümmung von $\hat{\omega}$, $D\phi = d\phi + [\hat{\omega}, \phi]$ die kovariante Ableitung bezüglich $\hat{\omega}$ und

$$V(\phi) = \langle \langle \mathfrak{P}(\phi), \mathfrak{P}(\phi) \rangle \rangle_{(3)} \quad (6.37)$$

mit

$$\mathfrak{P}(\phi) = \frac{1}{2} ([\phi, \phi] - \phi \circ [\cdot, \cdot] \downarrow \mathfrak{M} - \tau \circ [\cdot, \cdot] \downarrow \mathfrak{H}) \quad (6.38)$$

das Skalarfeldpotential. Die Symbole $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_{(i)}$ bezeichnen die Skalarprodukte auf den Räumen der horizontalen Formen auf \hat{P} mit Werten in $\wedge^2 T^*M \otimes \mathfrak{G}$, $T^*M \otimes \mathfrak{G}$ bzw. \mathfrak{G} . Ist (e_k) eine bezüglich γ orthonormale Basis in \mathfrak{M} , so gilt

$$V(\phi) = - \sum_{k,l} \langle F_{kl}, F_{kl} \rangle, \quad (6.39)$$

mit

$$F_{kl} = [\phi(e_k), \phi(e_l)] - \phi([e_k, e_l] \downarrow \mathfrak{M}) - \tau([e_k, e_l] \downarrow \mathfrak{H}) \quad (6.40)$$

und einer invarianten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathfrak{G} . Formal ist das Potential V von vierter Ordnung in ϕ . Es muß aber der Nebenbedingung (6.35) genügen. Diese muß man lösen, wenn man V explizit berechnen will. Gruppentheoretisch betrachtet besagt sie, daß ϕ ein Verflechtungsoperator der Darstellungen $\text{Ad } G \downarrow \lambda(H)$ und $\text{Ad } K \downarrow_H (\mathfrak{M}) = \text{Ad}(H)\mathfrak{M}$ ist. Aus technischen Gründen ist es günstiger, die beteiligten Lie-Algebren zu komplexifizieren. Eine allgemeine Methode zur Lösung der Zwangsbedingungen auf der Grundlage dieser Technik (samt einer relativ umfassenden gruppentheoretischen Analyse der möglichen Fälle) wurde in [6] diskutiert. Wie sich zeigt, ist das Potential V in vielen Fällen Higgs-artig und führt zu spontaner Symmetriebrechung in der reduzierten Theorie. Diese Tatsache wurde in vielen Arbeiten benutzt, um realistische Modelle zu konstruieren; eine ausführliche Liste von Referenzen dazu findet man in [6]. Die größte Beachtung fanden dabei das Weinberg-Salam-Modell und Modelle der großen Unifizierung. Letztere sind besonders interessant für die gegenwärtige Physik, da sie nur wenige freie Parameter enthalten (die ursprüngliche Kopplungskonstante und einige wenige Parameter rein geometrischen Ursprungs). Im Energiebereich der Beschleuniger der neuen Generation könnte man aus ihnen interessante Vorhersagen ableiten. Beachtenswerte Versuche, solche Modelle zu konstruieren, wurden z. B. in [8], [9], [10] unternommen (dort findet man auch weitere Referenzen). Bis jetzt hat man aber noch keine phänomenologisch befriedigende Lösung gefunden, da es außerordentlich schwer ist, die multidimensionale Theorie so zu wählen, daß die richtigen Higgs-Potentiale herauskommen.

Nehmen wir zum Beispiel die Konstruktion des üblichen unifizierten $SU(5)$ -Modells, welche in [8] diskutiert worden ist. Beschränkt man sich auf reguläre Unterhalbgruppen, dann kann diese Theorie nur aus einer multidimensionalen Eichtheorie mit der Eichgruppe E_8 gewonnen werden. Es zeigt sich aber, daß das Potential der reduzierten Theorie keinen Term vierter Ordnung für das Higgs-Feld in der adjungierten Darstellung von $SU(5)$ enthält. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir aber gesehen, daß ein solcher Term für die richtige Symmetriebrechung gleichwohl notwendig ist. Dieses Problem tritt bei Modellen, bei denen das schwere Higgsfeld in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe vorliegt, immer auf. Um es zu umgehen, wurde in [10] ein zusätzlicher Symmetriebrechungsmechanismus (basierend auf Wilson loops) vorgeschlagen. Uns scheint jedoch, daß man sich damit zu weit von der ursprünglichen Idee entfernt.

Stattdessen wollen wir das $SU(5) \times U(1)$ -Modell, ein unifiziertes Modell, dessen schweres Higgs-Feld nicht in der adjungierten Darstellung auftritt, im Rahmen des ursprünglichen CSDR-Schemas konstruieren. Dieses Modell wird in der physikalischen Literatur häufig diskutiert; man nimmt an, daß es mit den vorhandenen experimentellen Daten besser kompatibel ist als das $SU(5)$ -Modell, da es keinen Protonenzerfall vorhersagt. Durch die Postulierung einer zusätzlichen \mathbf{Z}_2 -Symmetrie gelang es uns, den bosonischen Sektor des Modells mit den richtigen Multipletts und Selbstwechselwirkungs-Termen zu konstruieren. Das entsprechende Higgs-Potential führt tatsächlich zur korrekten Symmetriebrechung und kann die Massenhierarchie erklären.

Beim $SU(5) \times U(1)$ -Modell liegt das schwere Higgs-Feld, welches die unifizierte Symmetrie bricht, in der Darstellung $\underline{10}(-1)$ vor und das leichte, welches die elektroschwache Symmetrie bricht, in der Darstellung $\underline{5}(2)$. Wir fanden drei Möglichkeiten, diese Multipletts mittels Dimensionsreduktion zu konstruieren:

1. $G = E_6, \quad K/H = SO(5)/SU(2) \times U(1), \quad \dim K/H = 6$
2. $G = E_7, \quad K/H = SO(7)/SU(3) \times U(1), \quad \dim K/H = 12$

$$3. G = E_8, \quad K/H = SO(9)/SU(4) \times U(1), \quad \dim K/H = 20.$$

Wie sich zeigt, ist der zweite Fall der interessanteste. Um das entsprechende Modell explizit zu konstruieren, müssen wir den Verflechtungsoperator ϕ finden, in die reduzierte Wirkung (6.36) einsetzen und den kinetischen Term und das Potential ausrechnen. Die betreffenden Rechnungen sind ziemlich kompliziert; man benötigt Basen von \mathfrak{K} und \mathfrak{G} , die an die Zerlegung der Darstellungen $\text{ad}(\mathfrak{H})\mathfrak{M}$ and $\text{Ad } \mathfrak{G} \downarrow \tau(\mathfrak{H})$ in irreduzible Komponenten angepaßt sind. Unter Verwendung der Resultate des Kapitels 5 kann man eine spezielle Technik entwickeln, mit deren Hilfe sich die Rechnungen wesentlich vereinfachen lassen. Diese wollen wir im nächsten Abschnitt besprechen.

Konstruktion von angepaßten Basen

Wie wir im Abschnitt 5.2 gesehen hatten, ist eine halbeinfache Unteralgebra von $su(n)$ durch die Einschränkung der fundamentalen Darstellung bis auf lineare Äquivalenz eindeutig bestimmt. Für die klassischen Lie-Algebren kann man die fundamentale Darstellung $(1, 0, \dots)$ als definierende Darstellung nehmen. Weiterhin hatten wir festgestellt, daß die adjungierten Darstellungen der klassischen Lie-Algebren auf folgende Weise durch fundamentale Darstellungen ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} \text{ad } sl(n) &= \underline{n}^* \overset{s}{\otimes} \underline{n} \\ \text{ad } so(n) &= \underline{n} \wedge \underline{n} \\ \text{ad } sp(n) &= (\underline{2n}) \overset{s}{\otimes} (\underline{2n}) \end{aligned} \tag{6.41}$$

($\overset{s}{\otimes}$ bezeichnet das symmetrisierte Tensorprodukt; siehe S. 77).

Damit können wir aus der Zerlegung der definierenden Darstellung die entsprechende Zerlegung der adjungierten Darstellung und die zugehörige Einbettung explizit ermitteln. Die Formeln (6.41) besagen, daß die den Lie-Algebren $sl(n)$, $so(n)$ und $sp(n)$ unterliegenden Vektorräume als Tensorprodukte der Darstellungsräume $R_{\underline{n}}$ von \underline{n} und $R_{\underline{n}^*}$ von \underline{n}^* ausgedrückt werden können¹. Man kann diese Tensorprodukte so mit einer Lie-Klammer versehen, daß sie zur betreffenden Lie-Algebra isomorph sind. Auf diese Weise erhält man eine Tensorprodukt-Darstellung der klassischen Lie-Algebren. Indem man den Darstellungsraum der Einschränkung der definierenden Darstellung auf die betrachtete Unter- algebra in irreduzible Komponenten zerlegt, erhält man explizit die zugehörige Einbettung der Unter- algebra. Wir werden uns weiter unten Beispiele dieser Technik anschauen. Zuerst wollen wir jedoch etwas genauer auf die Realisierung der klassischen Lie-Algebren als Tensorprodukte eingehen.

Beginnen wir mit $sl(n)$. Für $u \in R_{\underline{n}}$, $v^* \in R_{\underline{n}^*}$ setzen wir $(v^*, u) := v^*(u)$. Diese 'Paarung' $(\cdot, \cdot) : R_{\underline{n}} \times R_{\underline{n}^*} \rightarrow \mathbb{C}$ induziert eine natürliche Bilinearform auf dem Tensorprodukt $R_{\underline{n}^*} \otimes R_{\underline{n}}$ durch

$$\langle u^* \otimes v, w^* \otimes x \rangle = (u^*, x)(w^*, v). \tag{6.42}$$

Wir definieren ein Lie-Produkt durch

$$[u^* \otimes v, w^* \otimes x] = (w^*, v) u^* \otimes x - (u^*, x) w^* \otimes v \tag{6.43}$$

¹Der Darstellungsraum $R_{\underline{n}^*}$ der dualen Darstellung \underline{n}^* ist nach Definition der Dualraum von $R_{\underline{n}}$.

(man prüfe, daß die Jacobi-Identität erfüllt ist) und verifizieren, daß $R_n^* \otimes R_n$ mit diesem Produkt isomorph zur $gl(n)$ ist. Wählen wir eine Basis $\{e_a\}$ in R_n und bezeichnen mit $\{e^a\}$ die duale Basis in R_n^* , dann ist $\{e^a \otimes e_b\}$ eine Basis in $R_n^* \otimes R_n$. Unter Verwendung der Bezeichnung $D = \sum_{a=1}^n e^a \otimes e_a$ definieren wir

$$h_a^b := e^b \otimes e_a - \frac{D}{n} \delta_a^b. \quad (6.44)$$

Diese Generatoren erfüllen $\sum_a h_a^a = 0$, sind orthogonal zu D und erzeugen daher die Lie-Algebra $sl(n)$. Ihre Vertauschungsrelationen folgen direkt aus (6.43):

$$[h_a^b, h_c^d] = \delta_a^d h_c^b - \delta_c^b h_a^d; \quad (6.45)$$

ihre Normierung ist durch

$$\langle h_a^b, h_c^d \rangle = \delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{n} \delta_c^d \delta_a^b \quad (6.46)$$

gegeben. Man prüft nach, daß die Elemente $h_a^a - h_b^b$ (keine Summation) eine Cartan-Unteralgebra von $sl(n)$ aufspannen, bezüglich der die Elemente h_b^a für $a \neq b$ Wurzelvektoren sind und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kanonisch normierte ISBLF ist.

Bei den orthogonalen und symplektischen Lie-Algebren gehen wir analog vor. Im Fall der Lie-Algebra $so(n)$ ist die definierende Darstellung \underline{n} selbstdual (d. h. $\underline{n}^* = \underline{n}$) und der Raum R_n besitzt eine symmetrische Bilinearform (\cdot, \cdot) . Ist $\{e_a\}$ eine Basis in R_n , dann ist $\{e_a \wedge e_b\}$ ($a < b$) eine Basis in $R_n \wedge R_n \cong so(n)$ mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [e_a \wedge e_b, e_c \wedge e_d] &= \frac{1}{2}((e_b, e_c) e_a \wedge e_d - (e_a, e_c) e_b \wedge e_d + \\ &\quad + (e_b, e_d) e_c \wedge e_a - (e_a, e_d) e_c \wedge e_b). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Ist die Basis $\{e_a\}$ orthonormal, so erhält man die üblichen Relationen der $so(n)$. Im Prinzip kann sie aber beliebig gewählt werden, was bei der Untersuchung von Unteralgebren von Nutzen ist. Die Basis $\{e_a \wedge e_b\}$ ist folgendermaßen normiert:

$$\langle e_a \wedge e_b, e_c \wedge e_d \rangle = \frac{1}{4}((e_b, e_c) (e_a, e_d) - (e_a, e_c) (e_b, e_d)). \quad (6.48)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die kanonisch normierte ISBLF auf $so(n)$. Durch geeignete Wahl der Basis $\{e_a\}$ kann man erreichen, daß die Basis $\{e_a \wedge e_b\}$ aus Cartan-Elementen und Wurzelvektoren besteht.

Bei $sp(n)$ ist die definierende Darstellung $\underline{2n}$ ebenfalls selbstdual und der Darstellungsraum R_{2n} besitzt eine antisymmetrische Bilinearform (\cdot, \cdot) . Eine Basis $\{e_a\}$ in R_{2n} induziert eine Basis $\{e_a \overset{s}{\otimes} e_b\}$ in $R_{2n} \overset{s}{\otimes} R_{2n}$ mit den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [e_a \overset{s}{\otimes} e_b, e_c \overset{s}{\otimes} e_d] &= \frac{1}{2}((e_b, e_c) e_a \overset{s}{\otimes} e_d + (e_a, e_c) e_b \overset{s}{\otimes} e_d + \\ &\quad + (e_b, e_d) e_a \overset{s}{\otimes} e_c + (e_a, e_d) e_b \overset{s}{\otimes} e_c) \end{aligned} \quad (6.49)$$

und der Normierung

$$\langle e_a \overset{s}{\otimes} e_b, e_c \overset{s}{\otimes} e_d \rangle = \frac{1}{2}((e_b, e_c) (e_d, e_a) + (e_a, e_c) (e_d, e_b)). \quad (6.50)$$

Wie bei $so(n)$ kann man die Basis $\{e_a\}$ so wählen, daß die Basis $\{e_a \overset{s}{\otimes} e_b\}$ aus Cartan-Elementen und Wurzelvektoren besteht.

Die hier diskutierten Darstellungen sind natürlich äquivalent zu den gewöhnlichen Matrix-Darstellungen. Sie sind nur sehr viel besser für die Behandlung von Unteralgebren geeignet, da letztere durch Zerlegungen der fundamentalen Darstellungen, die in die Tensorprodukte eingehen, gegeben sind.

Wir wollen diese Technik an zwei Beispielen veranschaulichen, die wir im nächsten Abschnitt für die Konstruktion eines Modells mit der Strukturgruppe $SU(5) \times U(1)$ benötigen werden. Dort wollen wir $SO(7)/(SU(3) \times U(1))$ als Faktorraum K/H nehmen. Nach den Ausführungen im Abschnitt 6.2 benötigen wir dazu erstens eine Einbettung von $SU(3) \times U(1)$ in $SO(7)$ und zweitens eine Einbettung von $SU(3) \times U(1)$ in E_7 , die so beschaffen ist, daß ihr Zentralisator in E_7 gerade $SU(5) \times U(1)$ ist.

1. Durch die folgende Verzweigungsregel fixieren wir eine Einbettung von $su(3) \oplus u(1)$ in $so(7)$:

$$\underline{7} \rightarrow \underline{3}(-1) \oplus \underline{1}(0) \oplus \underline{3}^*(1). \quad (6.51)$$

Sei $\{e_m\}$ eine an diese Zerlegung angepaßte Basis in $R_{\underline{7}}$ mit

$$\begin{aligned} \{e_m\} &= \{e_a, e_0, e^b, \}, \quad a, b = 1, 2, 3 \\ (e_a, e^b) &= \delta_a^b, \quad (e_0, e_0) = 1. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Diese induziert eine an die Zerlegung angepaßte Basis in $so(7)$:

$$\begin{aligned} h_a^b &= 2(e^b \wedge e_a - \frac{1}{3}\delta_a^b e^c \wedge e_c), \quad h = 2e_a \wedge e^a \\ Q_a &= 2e_0 \wedge e_a, \quad Q^a = 2e^a \wedge e_0 \\ P_a &= -\epsilon_{abc} e^b \wedge e^c, \quad P^a = \epsilon^{abc} e_b \wedge e_c. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Aus (6.48) und (6.52) ergeben sich die Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \langle h, h \rangle &= 3, \quad \langle h_a^b, h_c^d \rangle = \delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{3} \delta_a^b \delta_c^d \\ \langle Q_a, Q^b \rangle &= \delta_a^b, \quad \langle P_a, P^b \rangle = \delta_a^b. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Alle anderen Produkte verschwinden. Unter Benutzung von (6.47) und (6.53) erhalten wir die Vertauschungsrelationen der angepaßten Basis

$$\begin{aligned} [h_a^b, h_c^d] &= \delta_a^d h_c^b - \delta_c^b h_a^d \\ [h, Q_a] &= Q_a, \quad [h, Q^a] = -Q^a \\ [h, P_a] &= -2P_a, \quad [h, P^a] = 2P^a \\ [h_a^b, Q_c] &= -\delta_c^b Q_a + \frac{1}{3} \delta_a^b Q_c, \quad [h_a^b, Q^c] = \delta_a^c Q^b - \frac{1}{3} \delta_a^b Q^c \\ [h_a^b, P_c] &= -\delta_c^b P_a + \frac{1}{3} \delta_a^b P_c, \quad [h_a^b, P^c] = \delta_a^c P^b - \frac{1}{3} \delta_a^b P^c \\ [Q_a, Q_b] &= -\epsilon_{abc} P^c, \quad [Q^a, Q^b] = \epsilon^{abc} P_c \\ [Q_a, P_b] &= -\epsilon_{abc} Q^c, \quad [Q^a, P^b] = \epsilon^{abc} Q_c \\ [Q^a, Q_b] &= h_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a h, \quad [P^a, P_b] = h_b^a + \frac{2}{3} \delta_b^a h \end{aligned} \quad (6.55)$$

(alle anderen Kommutatoren verschwinden).

2. Nun wollen wir $SU(3) \times U(1)$ so in E_7 einbetten, daß der Zentralisator dieser Untergruppe gerade $SU(5) \times U(1)$ ist. Leider sind die adjungierten Darstellungen der exceptionellen

Lie-Algebren entweder selbst definierend oder sie lassen sich nicht auf einfache Weise durch definierende ausdrücken. Aus diesem Grunde haben wir keine Tensorprodukt-Darstellung der Art, wie wir sie oben für die klassischen Lie-Algebren diskutiert haben. Im vorliegenden Fall können wir jedoch $su(3) \oplus u(1)$ in die reguläre Unteralgebra $su(3) \oplus su(6)$ von e_7 einbetten. Wir müssen dann die Standardeinbettung von $su(3) \oplus su(6)$ in e_7 nehmen und $su(6)$ bezüglich einer regulären Einbettung von $su(5) \oplus u(1)$ weiter zerlegen. Auf diese Weise erhalten wir die Einbettung von $su(3) \oplus u(1)$ in e_7 mit dem geforderten Zentralisator.

Die Standardzerlegung von $\text{ade}_7 \downarrow su(3) \oplus su(6)$ ist [11]

$$\text{ade}_7 \downarrow su(3) \oplus su(6) = (\underline{8}, \underline{1}) \oplus (\underline{3}, \underline{15}^*) \oplus (\underline{3}^*, \underline{15}) \oplus (\underline{1}, \underline{35}).$$

Mit Hilfe der beschriebenen Tensorprodukt-Technik kann man Basen in $su(3)$ und $su(6)$ (identifiziert mit den Darstellungsräumen der adjungierten Darstellungen $\underline{8}$ bzw. $\underline{35}$) aufschreiben. Unter Beachtung von $\underline{15} \cong \underline{6} \wedge \underline{6}$ kann man eine Basis in $\underline{15}$ aus einer Basis in $\underline{6}$ aufbauen. Bezeichnen wir die Basis von $\underline{3}$ von $su(3)$ mit $\{e^a\}$, $(e_a, e^b) = \delta_a^b$, $a, b = 1, 2, 3$ und diejenige von $\underline{6}$ von $su(6)$ mit $\{e_i\}$, $(e_i, e^k) = \delta_i^k$, $i, k = 0, 1, \dots, 5$, so erhalten wir eine Darstellung für die Generatoren von e_7 . Analog zu (6.44) werden die kanonisch normierten Basen in $\underline{8} \equiv su(3)$ bzw. $\underline{35} \equiv su(6)$ mit H_b^a , $a, b = 1, 2, 3$ bzw. H_k^i , $i, k = 0, 1, \dots, 5$ bezeichnet. Sie genügen den Vertauschungsrelationen (6.46). Die Basis im Darstellungsraum von $(\underline{3}, \underline{15}^*)$ ist durch

$$P_{ik}^a = e^a \otimes e_i \wedge e_k \quad (6.56)$$

gegeben. Die duale Basis im Darstellungsraum von $(\underline{3}^*, \underline{15})$ ist dann

$$P_a^{ik} = e_a \otimes e^i \wedge e^k. \quad (6.57)$$

Mit der Abkürzung $\delta_{ik}^{lm} = \delta_i^l \delta_k^m - \delta_i^m \delta_k^l$ gilt

$$\langle P_{ik}^a, P_b^{lm} \rangle = \delta_b^a \delta_{ik}^{lm}. \quad (6.58)$$

Für diese Generatoren ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [H_a^b, P_{ik}^c] &= \delta_a^c P_{ik}^b - \frac{1}{3} \delta_a^b P_{ik}^c, & [H_a^b, P_c^{ik}] &= -\delta_c^b P_a^{ik} + \frac{1}{3} \delta_a^b P_c^{ik} \\ [H_i^k, P_{lm}^a] &= -\delta_i^l P_{im}^a - \delta_m^k P_{li}^a + \frac{1}{3} \delta_i^k P_{lm}^a \\ [H_i^k, P_a^{lm}] &= \delta_l^k P_a^{km} + \delta_i^m P_a^{lk} - \frac{1}{3} \delta_i^k P_a^{lm} \\ [P_{ik}^a, P_b^{lm}] &= H_b^a \delta_{ik}^{lm} - \delta_b^a (\delta_i^l H_k^m - \delta_i^m H_k^l + \delta_k^m H_i^l - \delta_k^l H_i^m) \\ [P_{ik}^a, P_{lm}^b] &= \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{iklmnp} P_c^{np}, & [P_a^{ik}, P_b^{lm}] &= -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon^{iklmnp} P_{np}^c. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Als nächstes betten wir $su(5) \oplus u(1)$ in $su(6) \subset e_7$ entsprechend der Verzweigungsregel

$$\underline{6} \rightarrow \underline{5} \left(\frac{1}{2} \right) \oplus \underline{1} \left(-\frac{5}{2} \right) \quad (6.60)$$

ein. Diese ist so gewählt, daß der Zentralisator von $u(1)$ in $su(6)$ gerade $su(5) \oplus u(1)$ ist. Die gesuchte Zerlegung von ade_7 ist demnach

$$\begin{aligned} \text{ade}_7 \downarrow su(3) \oplus su(5) \oplus u(1) &= (\underline{8}, \underline{1})(0) \oplus (\underline{1}, \underline{24})(0) \oplus (\underline{1}, \underline{1})(0) \\ &\oplus (\underline{3}^*, \underline{10})(1) \oplus (\underline{3}, \underline{10}^*)(-1) \oplus (\underline{3}^*, \underline{5})(-2) \\ &\oplus (\underline{3}, \underline{5}^*)(2) \oplus (\underline{1}, \underline{5})(3) \oplus (\underline{1}, \underline{5}^*)(-3). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Der Verzweigungsregel (6.60) entspricht die Zerlegung der Basis $\{e_i\}$ in $\{e_0, e_p\}$, $p = 1, \dots, 5$ und $\{C_p^q, E_r, E^s, H\}$, $p, q, r, s = 1, \dots, 5$, wobei wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} H &= -3H_0^0, & C_p^q &= H_p^q - \frac{1}{15}\delta_p^q H \\ E_r &= H_r^0, & E^s &= H_0^s \end{aligned} \quad (6.62)$$

eingeführt haben. Lateinische Indizes laufen von jetzt ab von 1 bis 5. Analog zerlegen sich die Generatoren $\{P_{ik}^a, P_b^{lm}\}$ in $\{P_r^a, P_b^s, Q_{rs}^a, Q_b^{rs}\}$ mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} P_r^a &= P_{0r}^a, & P_b^s &= P_b^{0s} \\ Q_{rs}^a &= P_{rs}^a, & Q_b^{rs} &= P_b^{rs}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Damit haben wir einen Satz von Generatoren $\{H, H_a^b, C_p^q, E_r, E^s, P_r^a, P_b^s, Q_{rs}^a, Q_b^{rs}\}$, der an die Zerlegung (6.61) angepaßt ist. Er genügt den Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &= \frac{15}{2}, & \langle H_a^b, H_c^d \rangle &= \delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{3} \delta_a^b \delta_c^d \\ \langle C_i^k, C_l^m \rangle &= \delta_i^m \delta_l^k - \frac{1}{5} \delta_i^k \delta_l^m, & \langle E_i, E^k \rangle &= \delta_i^k \\ \langle P_i^a, P_b^k \rangle &= \delta_b^a \delta_i^k, & \langle Q_{ik}^a, Q_b^{lm} \rangle &= \delta_b^a \delta_{ik}^{lm}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

und den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [H, E_i] &= -3E_i, & [H, E^i] &= 3E^i \\ [H, P_i^a] &= 2P_i^a, & [H, P_a^i] &= -2P_a^i \\ [H, Q_a^{ik}] &= Q_a^{ik}, & [H, Q_{ik}^a] &= -Q_{ik}^a \\ [H_a^b, P_i^c] &= \delta_a^c P_i^b - \frac{1}{3} \delta_a^b P_i^c, & [H_a^b, P_c^i] &= -\delta_c^b P_a^i + \frac{1}{3} \delta_a^b P_c^i \\ [H_a^b, Q_{ik}^c] &= \delta_a^c Q_{ik}^b - \frac{1}{3} \delta_a^b Q_{ik}^c, & [H_a^b, Q_{ik}^a] &= -\delta_c^b Q_{ik}^a + \frac{1}{3} \delta_a^b Q_{ik}^c \\ [C_i^k, P_l^a] &= -\delta_l^k P_i^a + \frac{1}{5} \delta_i^k P_l^a, & [C_i^k, P_a^l] &= \delta_i^l P_a^k - \frac{1}{5} \delta_i^k P_a^l \\ [C_i^k, Q_{lm}^a] &= -\delta_l^k Q_{im}^a - \delta_m^k Q_{li}^a + \frac{2}{5} \delta_i^k Q_{lm}^a \\ [C_i^k, Q_a^{lm}] &= \delta_i^l Q_a^{km} + \delta_i^m Q_a^{lk} - \frac{2}{5} \delta_i^k Q_a^{lm} \\ [C_i^k, E_l] &= -\delta_l^k E_i, & [C_i^k, E^l] &= \delta_i^l E^k \\ [E^k, E_l] &= \frac{1}{3} \delta_l^k H, & [E^k, P_a^l] &= Q_a^{kl}, & [E_k, P_l^a] &= -Q_{kl}^a \\ [E^k, Q_{lm}^a] &= -\delta_l^k P_m^a + \delta_m^k P_l^a, & [E_k, Q_a^{lm}] &= \delta_k^l P_a^m - \delta_k^m P_a^l \\ [P_i^a, P_b^k] &= H_b^a \delta_i^k - \delta_b^a C_i^k + \frac{4}{15} \delta_i^k \delta_b^a H \\ [P_i^a, Q_{kl}^b] &= \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{iklmn} Q_c^{mn}, & [P_a^i, Q_b^{kl}] &= -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon^{iklmn} Q_{mn}^c \\ [Q_{ik}^a, Q_{lm}^b] &= \epsilon^{abc} \epsilon_{iklmn} P_c^n, & [Q_a^{ik}, Q_b^{lm}] &= -\epsilon_{abc} \epsilon^{iklmn} P_n^c \\ [Q_{ik}^a, Q_b^{lm}] &= H_b^a \delta_{ik}^{lm} - \frac{2}{15} \delta_b^a \delta_{ik}^{lm} H - \delta_b^a (\delta_i^l C_k^m - \delta_i^m C_k^l + \delta_k^m C_i^l - \delta_k^l C_i^m) \\ [Q_{ik}^a, P_b^l] &= \delta_b^a (\delta_i^l E_k - \delta_k^l E_i), & [Q_a^{ik}, P_l^b] &= -\delta_a^b (\delta_i^l E^k - \delta_k^l E^i). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Die Kommutatoren der H_a^b und C_i^k untereinander sind natürlich von der Form (6.47). Alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Das $SU(5) \times U(1)$ -Modell

Unter Verwendung der angepaßten Basen in $so(7)$ und e_7 definieren wir nun den Morphismus τ (vgl. (6.35)) durch

$$\tau(h) = H, \quad \tau(h_b^a) = H_b^a. \quad (6.66)$$

Man kann leicht nachprüfen, daß der Verflechtungsoperator ϕ , der diesem Morphismus entspricht, nichttrivial ist. Durch die Relationen

$$\begin{aligned} I^{ik}(Q_a) &= Q_a^{ik}, & I_{ik}(Q^a) &= Q_{ik}^a \\ I^i(P_a) &= P_a^i, & I_i(P^a) &= P_i^a \end{aligned} \quad (6.67)$$

definieren wir eine Basis im Raum der Verflechtungsoperatoren. ϕ kann dann in der Form

$$\phi = \phi^i(x)I_i + \frac{1}{2}\beta^{ik}(x)I_{ik} + c.c., \quad (6.68)$$

mit beliebigen skalaren Feldern $\phi^i(x)$ und $\beta^{ik}(x) = -\beta^{ki}(x)$ geschrieben werden.

Um das Potential V (6.39) explizit ausrechnen zu können, benötigen wir eine $SO(7)$ -invariante Metrik auf $SO(7)/(SU(3) \times U(1))$. Eine solche Metrik besitzt zwei freie Parameter: M bezeichne den zum Unterraum \mathfrak{M}_1 der Darstellung $\underline{\mathfrak{3}}^*(1) \oplus \underline{\mathfrak{3}}(-1)$ in \mathfrak{M} korrespondierenden Parameter; $M\kappa$ sei derjenige, der zum Unterraum \mathfrak{M}_2 der Darstellung $\underline{\mathfrak{3}}(2) + \underline{\mathfrak{3}}^*(-2)$ in \mathfrak{M} gehört. Während M die Dimension einer Masse hat, ist κ dimensionslos. Damit ist die invariante Metrik im Punkt [1] von $SO(7)/(SU(3) \times U(1))$ durch

$$\gamma(a, b) = -\frac{1}{M^2}(\langle a_1, b_1 \rangle + \frac{1}{\kappa^2}\langle a_2, b_2 \rangle) \quad (6.69)$$

($a_i, b_i \in \mathfrak{M}_i$) gegeben. Die Generatoren

$$\{MQ_a, MQ^b, M\kappa P_a, M\kappa P^b\} \quad (6.70)$$

bilden eine bezüglich γ orthonormale Basis von \mathfrak{M} .

Setzen wir den Operator ϕ aus (6.68) und diese Basis in Gleichung (6.39) ein, können wir das Potential V explizit ausrechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} V &= 36M^4(\beta^2)^2 - 6M^4\text{tr}\beta^4 - 12M^4(3 - 2\kappa^2)\beta^2 + \\ &+ 24M^4\kappa^4(\phi^2)^2 - 12M^4(4\kappa^4 - 1)\phi^2 + 24M^4\kappa^2\beta^2\phi^2 - \\ &- 12M^4\kappa^2(\beta\phi)^2 - 6M^4(1 + 2\kappa^2)\text{Re}\phi(\beta \times \beta) + 3M^4(7 + 12\kappa^4) \end{aligned} \quad (6.71)$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{1}{2}\beta_{ik}\beta^{ik}, & \text{tr}\beta^4 &= \beta_{pr}\beta_{qs}\beta^{pq}\beta^{rs}, & \phi^2 &= \phi_n\phi^n, \\ \phi(\beta \times \beta) &= \beta_{ik}\beta_{lm}\phi_n\epsilon^{iklmn}, & (\beta\phi)^2 &= \beta_{li}\beta^{lk}\phi_k\phi^i. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Dieses Potential ist das allgemeinste in dem Sinne, daß es alle möglichen Invarianten bis einschließlich vierter Ordnung in ϕ und β enthält. Eine Besonderheit stellt das Auftreten des kubischen Terms $\phi(\beta \times \beta)$ dar. Gewöhnlich enthalten die Higgs-Potentiale der unifizierten Modelle nur gerade Potenzen des Higgs-Feldes, da man gemeinhin fordert, daß das Potential invariant unter einem Vorzeichenwechsel des Higgs-Feldes ϕ ist [1]. Auch wir stellen diese Forderung und postulieren ad hoc eine zusätzliche \mathbf{Z}_2 -Symmetrie der reduzierten Theorie. Bisher ist es uns noch nicht gelungen, diese Symmetrie durch einen geometrischen Mechanismus auf dem Niveau der multidimensionalen Theorie zu implementieren.

Unterliegt V dieser zusätzlichen Symmetrie, so verschwindet der Term $\phi(\beta \times \beta)$ in (6.71) und es ergibt sich das kanonische Higgs-Potential

$$\begin{aligned} V = & 36M^4(\beta^2)^2 - 6M^4\text{tr}\beta^4 - 12M^4(3 - 2\kappa^2)\beta^2 + \\ & + 24M^4\kappa^4(\phi^2)^2 - 12M^4(4\kappa^4 - 1)\phi^2 + 24M^4\kappa^2\beta^2\phi^2 - \\ & - 12M^4\kappa^2(\beta\phi)^2 + 3M^4(7 + 12\kappa^4). \end{aligned} \quad (6.73)$$

Wir erwähnen, daß die Potentiale für die anderen eingangs erwähnten Strukturgruppen E_6 und E_8 von dem hier erhaltenen hinsichtlich verschiedener Aspekte abweichen. Erstens haben sie andere Faktoren vor den Invarianten, zweitens fehlt im Falle der Strukturgruppe E_6 der Term mit $\text{tr}\beta^4$ und im Falle der Strukturgruppe E_8 der Term mit $(\beta\phi)^2$. Diese Terme sind aber beide von Bedeutung für die Symmetriebrechung.

Um die Extrema des Potentials zu berechnen, wählen wir eine geeignete Eichung:

$$\begin{aligned} \beta^{12} = -\beta^{21} = a, \quad \beta^{34} = -\beta^{43} = b, \quad (\text{alle anderen Komponenten} = 0), \\ \phi^1 = R, \quad \phi^3 = r, \quad \phi^5 = \alpha, \quad \phi^2 = \phi^4 = 0, \quad \alpha, a, b, r, R \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.74)$$

In dieser Eichung haben die Invarianten die Werte

$$\begin{aligned} \beta^2 = a^2 + b^2, \quad \text{tr}\beta^4 = 2(a^4 + b^4), \\ \phi^2 = R^2 + r^2 + \alpha^2, \quad (\beta\phi)^2 = a^2R^2 + b^2r^2. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Setzen wir diese Werte in das Potential ein, erhalten wir eine Funktion von fünf Variablen, deren Extrema wir bestimmen müssen. Dabei sind wir an dem Extremum interessiert, für das

$$\alpha = b = r = 0, \quad a^2 \neq 0, \quad R^2 \neq 0 \quad (6.76)$$

gilt, denn es liefert die Gruppe $SU(3) \times U(1)$ als Stabilisator-Untergruppe des Higgs-Vakuums. Es gibt zwei Methoden, die Extrema aufzufinden: eine vereinfachte, die dem physikalischen Bild der zwei Stufen der Symmetriebrechung entspricht, und eine strenge. Die vereinfachte Vorschrift ist die folgende: Zuerst vernachlässigt man das leichte Higgs-Feld ϕ und sucht die Extrema des Potentials des schweren Higgs-Feldes β . Dann sucht man die Extrema des Potentials des Feldes ϕ mit β im Higgs-Vakuum. Dieses Verfahren liefert für $\frac{1}{2} < \kappa^2 < \frac{3}{2}$ das absolute Minimum des Potentials (6.73) mit der erforderlichen Stabilisator-Untergruppe des Vakuums, während es in den Fällen der Strukturgruppen E_6 und E_8 zeigt, daß keine Minima mit dieser Untergruppe existieren. Das liegt daran, daß dort, wie erwähnt, wichtige Terme im Potential fehlen.

Eine strenge Analyse ergibt genauere Resultate. Sie zeigt, daß das Extremum mit $SU(3) \times U(1)$ als Stabilisator-Untergruppe des Higgs-Vakuums für

$$\frac{1 + \sqrt{33}}{12} < \kappa^2 < \frac{3 + \sqrt{12}}{6} \quad (6.77)$$

das absolute Minimum des Potentials (6.73) ist.

Um die so erhaltene Theorie besser beurteilen und mit der per Hand aufgeschriebenen Standardtheorie vergleichen zu können, müssen wir die reduzierte Wirkung (6.36) auf eine kanonische Form bringen. Dazu spalten wir das $SU(5) \times U(1)$ -Eichfeld in nicht-Abelsche und Abelsche Komponenten A_μ und A'_μ auf, definieren die Kopplungskonstanten um:

$$g_u^2 = \frac{5\hat{g}^2}{4}, \quad g_a^2 = \frac{\hat{g}^2}{30}, \quad (6.78)$$

und reskalieren das Higgs-Feld gemäß

$$\frac{M}{g_u} \sqrt{15} \beta \mapsto \beta, \quad \frac{M\kappa}{g_u} \sqrt{15} \phi \mapsto \phi. \quad (6.79)$$

Der reduzierte Lagrangian hat die Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8g_u^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4g_a^2} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} - (D_\mu \beta)^\dagger D^\mu \beta - (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\beta, \phi) \quad (6.80)$$

mit

$$\begin{aligned} (D_\mu \beta)^{ik} &= \partial_\mu \beta^{ik} + iA'_\mu \beta^{ik} + A_\mu^a T(a)_{lm}^{ik} \beta^{lm} \\ (D_\mu \phi)^k &= \partial_\mu \phi^k - 2iA'_\mu \phi^k + A_\mu^a T(a)_l^k \phi^l \end{aligned} \quad (6.81)$$

und den Generatoren $T(a)_{lm}^{ik}$ sowie $T(a)_l^k$, $a = 1, \dots, 24$ von $SU(5)$ in den Darstellungen $\underline{10}$ (schweres Higgs-Feld) und $\underline{5}$ (leichtes Higgs-Feld). Das Verhältnis der Kopplungskonstanten ist

$$\frac{g_a^2}{g_u^2} = \frac{2}{75}. \quad (6.82)$$

Das Potential hat die Form

$$\begin{aligned} V &= \frac{g_u^2}{5} (\beta^2)^2 - \frac{g_u^2}{30} \text{tr} \beta^4 - M^2 (3 - 2\kappa^2) \beta^2 + \frac{2g_u^2}{15} (\phi^2)^2 - \\ &\quad - M^2 \frac{4\kappa^4 - 1}{\kappa^2} \phi^2 + \frac{2g_u^2}{15} \beta^2 \phi^2 - \frac{g_u^2}{15} (\beta\phi)^2 + \frac{15}{4g_u^2} M^4 (7 + 12\kappa^4). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Wir weisen darauf hin, daß der bosonische Sektor des Modells, so wie er hier konstruiert wurde, nur drei freie Parameter besitzt, die aus den experimentellen Daten bestimmt werden müssen. Für die Massen der Higgs-Felder erhalten wir zum Beispiel folgende Werte:

$$\begin{aligned} m_\beta^2 &= 16M^2 \frac{12\kappa^2 - 12\kappa^4 + 1}{\kappa^2}, \\ m_\phi^2 &= 16M^2 \frac{18\kappa^4 - 3\kappa^2 - 4}{\kappa^2}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Wir wollen diese Formeln unter Benutzung des Verhältnisses der Massen $\mu^2 = \frac{m_\phi^2}{m_\beta^2}$ umschreiben. Aufgrund von $\mu^2 \ll 1$ haben wir

$$\kappa^2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{12} + \frac{5(\sqrt{33} - 1)}{18\sqrt{33}} \mu^2.$$

Setzen wir das in (6.84) ein, ergibt sich für die Massen

$$\begin{aligned} m_\beta^2 &= 10M^2 (17 - \sqrt{33}), \\ m_\phi^2 &= 10M^2 (17 - \sqrt{33}) \mu^2. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß das Modell an beliebig leichte Higgs-Massen angepaßt werden kann und für $\kappa^2 \simeq \frac{1+\sqrt{33}}{12}$ eine Massenhierarchie erlaubt. Dies ist für mit der Methode der Dimensionsreduktion konstruierte Modelle, wie erwähnt, nicht selbstverständlich, da die Teilchenmassen durch die Geometrie fixiert sind. Hätte das Polynom in dem Ausdruck für m_ϕ^2 in (6.84) keine reellen Wurzeln, gäbe es keine Massenhierarchie.

Nun wollen wir den Weinberg-Winkel und die Verhältnisse der Kopplungskonstanten berechnen. Dabei benutzen wir das physikalische Bild der Symmetriebrechung in zwei Stufen. Die erste Stufe kann man folgendermaßen beschreiben: Wie wir schon diskutiert hatten, wird durch die Verzweigungsregeln (6.4) und (6.5) eine $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -Untergruppe von $SU(5)$ festgelegt. Die zugehörige Verzweigungsregel der Darstellung $\underline{10} = \underline{5} \wedge \underline{5}$ ist dann

$$\underline{10} \rightarrow (\underline{3}^*, \underline{1})\left(-\frac{2}{3}\right) + (\underline{3}, \underline{2})\left(\frac{1}{6}\right) + (\underline{1}, \underline{1})(1). \quad (6.85)$$

Bezeichnen wir den Generator der ursprünglichen $U(1)$ -Untergruppe mit Z und den von $U(1) \subset SU(5)$ mit X , dann entspricht der Generator $Y = \frac{1}{5}(X + Z)$ gerade der Hälfte der schwachen Hyperladung des Standardmodells. Es ist leicht einzusehen, daß die Komponente β_0 in der Darstellung $(\underline{1}, \underline{1})(1)$ (vgl. (6.85)) des Feldes β zum Eigenwert 0 von Y gehört. Das Feld β_0 kann also einen von Null verschiedenen Vakuum-Erwartungswert besitzen, ohne daß die Invarianz des Vakuums unter der zugehörigen $U(1)$ -Gruppe verletzt wird. Bezeichnet X_μ das von X erzeugte Eichfeld und reskalieren wir $X_\mu \rightarrow g_u \sqrt{\frac{6}{25}} X_\mu$ und $A'_\mu \rightarrow g_a A'_\mu$, so erhält die Wechselwirkung zwischen der Komponente β_0 , X_μ und A'_μ die Gestalt

$$\left((ig_u \sqrt{\frac{6}{25}} X_\mu - ig_a A'_\mu) \beta_0 \right)^\dagger \left(ig_u \sqrt{\frac{6}{25}} X^\mu - ig_a A'^\mu \right) \beta_0. \quad (6.86)$$

Hierbei beachte man $\text{tr}(XX) = 25/3$, vgl. (6.10). Analog zu (6.20) führen wir eine Drehung

$$\begin{aligned} X_\mu &= \sin \theta B_\mu + \cos \theta C_\mu \\ A'_\mu &= \cos \theta B_\mu - \sin \theta C_\mu \end{aligned} \quad (6.87)$$

aus und fordern, daß B_μ aus (6.86) verschwindet. Mit dem durch (6.82) gegebenen Verhältnis g_a/g_u ergibt sich

$$\tan \theta = \frac{g_a}{g_u} \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{1}{3}. \quad (6.88)$$

Das Feld C_μ erhält in dieser Stufe der Symmetriebrechung eine Masse auf der Skala der großen Unifizierung. Im folgenden lassen wir es daher außer Betracht.

Für die zweite Stufe der Symmetriebrechung müssen wir wissen, wie B_μ an ϕ koppelt. Aus dem Wechselwirkungsterm

$$\left(\left(\frac{i}{2} g_u \sqrt{\frac{6}{25}} X_\mu + 2ig_a A'_\mu \right) \phi \right)^\dagger \left(\frac{i}{2} g_u \sqrt{\frac{6}{25}} X^\mu + 2ig_a A'^\mu \right) \phi \quad (6.89)$$

erhalten wir mit Hilfe der Formeln (6.87)

$$\frac{i}{2} g_u \sqrt{\frac{3}{5}} B_\mu \phi. \quad (6.90)$$

Es ergibt sich $g'^2/g_u^2 = 3/5$, anstelle von $g'^2/g_u^2 = 6/25$ im $SU(5)$ -Modell (6.12). In Analogie zur Argumentation bei diesem Modell berechnen wir für den Weinberg-Winkel

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{5} \quad (6.91)$$

und für die Kopplungskonstanten, ausgedrückt durch α ,

$$\frac{g_s^2}{4\pi} = \frac{9}{10}\alpha, \quad \frac{g^2}{4\pi} = \frac{3}{5}\alpha. \quad (6.92)$$

Der Weinberg-Winkel im vorliegenden Modell ist nur wenig größer als der im gewöhnlichen $SU(5)$ -Modell (dort war $\sin^2 \theta_w = \frac{3}{8}$). Dieser Wert und die Verhältnisse der Kopplungskonstanten sind im Sinne einer energieabhängigen Kopplungskonstante ('running coupling constant') als asymptotische Werte für $E \rightarrow 10^{14} - 10^{15} GeV$ zu betrachten.

Zum Abschluß noch eine Bemerkung. Soweit uns bekannt ist, ist unser Modell das einzige mittels Dimensionsreduktion konstruierte unifizierte Modell, das zur richtigen spontanen Symmetriebrechung führt und eine Massenhierarchie erlaubt. Leider zeigt sich, daß es unmöglich ist, aus einer fermionischen Theorie mit Strukturgruppe E_7 im multidimensionalen Universum $E = M \times SO(7)/(SU(3) \times U(1))$ mit Hilfe der gewöhnlichen Dimensionsreduktion chirale Fermionen zu erhalten [6]. Wir hoffen, daß die oben eingeführte \mathbf{Z}_2 -Symmetrie diese Situation ändern kann. Dieses Problem erfordert aber eine spezielle Untersuchung.

Anhang

Tabelle 1: Einige klassische Lie-Algebren

Lie-Algebra	über	Dimension	Rang	Zerlegung in einfache und auflösbare Ideale	kompakt ¹	Klasse ²	λ ³
$gl(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 2$)	\mathbb{K}	n^2	n	$sl(n, \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}$	nein	–	–
$sl(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 2$)	\mathbb{K}	$n^2 - 1$	$n - 1$	einfach ⁴	nein	A_{n-1}	$2n$
$u(n)$ ($n \geq 2$)	\mathbb{R}	n^2	n	$su(n) \oplus i\mathbb{R}$	nein	–	–
$su(n)$ ($n \geq 2$)	\mathbb{R}	$n^2 - 1$	$n - 1$	einfach ⁴	ja	A_{n-1}	$2n$
$so(n, \mathbb{K})$ ($n \geq 3$)	\mathbb{K}	$\frac{1}{2} n(n-1)$	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ⁵	einfach ⁴ außer für $n = 4, \mathbb{K} = \mathbb{C}$: $so(3, \mathbb{C}) \oplus so(3, \mathbb{C})$	für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$n = 3$: A_1 4 : $A_1 \oplus A_1$ 6 : A_3 $5, 7, \dots$: $B_{\frac{n-1}{2}}$ $8, 10, \dots$: $D_{\frac{n}{2}}$	$n - 2$
$sp(n, \mathbb{K})$	\mathbb{K}	$n(2n+1)$	n	einfach ⁴	nein	C_n	$2(n+1)$
$sp(n)$	\mathbb{R}	$n(2n+1)$	n	einfach ⁴	ja	C_n	$2(n+1)$

Desweiteren gilt:

- $sp(1, \mathbb{K}) = sl(2, \mathbb{K}), \quad sp(1) = su(2)$
- $so(3) \cong su(2), \quad so(3, \mathbb{C}) \cong sl(2, \mathbb{C}), \quad so(5, \mathbb{C}) \cong sp(2, \mathbb{C}) \mid^4, \quad so(6, \mathbb{C}) \cong sl(4, \mathbb{C}) \mid^4$

¹Vgl. Satz 1.15

²Nur für die halbeinfachen Lie-Algebren; für diese vgl. Satz 3.6; bei den reellen halbeinfachen ist die Klasse der Komplexifizierung angegeben

³Der Proportionalitätsfaktor in der Gleichung $(A, B) = \lambda \text{tr}(AB)$ (vgl. Lemma 1.13); in den Fällen, wo keiner angegeben ist, sind Killing- und Spurform nicht proportional

⁴Vgl. Satz 3.6 und beachte, daß jede reelle Form $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ einer einfachen komplexen Lie-Algebra \mathcal{L} wieder einfach ist.

⁵ganzzahliger Anteil

Tabelle 2: Die einfachen komplexen Lie-Algebren

Typ	Dynkin-Diagramm	Dimension ¹	Repräsentant	Reelle Formen ²
A_ℓ ($\ell \geq 1$)		$(\ell+1)^2 - 1$	$sl(\ell+1, \mathbb{C})$	$su(\ell+1)$ $sl(\ell+1, \mathbb{R})$ $su(p, \ell+1-p)$ ($1 \leq p \leq \frac{\ell+1}{2}$) falls ℓ ungerade: $sl(\frac{\ell+1}{2}, \mathbb{H})$
B_ℓ ($\ell \geq 2$)		$\ell(2\ell+1)$	$so(2\ell+1, \mathbb{C})$	$so(2\ell+1, \mathbb{R})$ $so(p, (2\ell+1)-p)$ ($p = 1, \dots, \ell$)
C_ℓ ($\ell \geq 3$)		$\ell(2\ell+1)$	$sp(\ell, \mathbb{C})$	$sp(\ell)$ $sp(\ell, \mathbb{R})$ $sp(p, \ell-p)$ ($1 \leq p \leq \frac{\ell}{2}$)
D_ℓ ($\ell \geq 4$)		$\ell(2\ell-1)$	$so(2\ell, \mathbb{C})$	$so(2\ell)$ $u^*(2\ell, \mathbb{H})$ $so(p, 2\ell-p)$ ($p = 1, \dots, \ell$)
E_6		78	\dagger ^{3 4}	\dagger ³
E_7		133	\dagger ³	\dagger ³
E_8		248	\dagger ³	\dagger ³
F_4		52	\dagger ^{3 4}	\dagger ³
G_2		14	\dagger ^{3 4}	\dagger ³

Erläuterungen zur Spalte "Reelle Formen":

1. Die definierende Form⁵ von $so(p, q)$, $su(p, q)$ bzw. $sp(p, q)$ erhält man, wenn man die jeweilige definierende Form $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ von $so(p+q)$, $su(p+q)$ bzw. $sp(p+q)$ ersetzt durch

$$\langle \mathbf{a}, \mathbb{1}_{p,q} \mathbf{b} \rangle \quad \text{mit} \quad \mathbb{1}_{(p,q)} := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix}.$$

2. Die Lie-Algebra $u^*(\ell, \mathbb{H})$ ist definiert gemäß (1.10) durch die Sesquilinearform $\langle \mathbf{a}, j\mathbf{b} \rangle$ auf \mathbb{H}^ℓ (j ist die quaternionische imaginäre Einheit, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ das kanonische Skalarprodukt).

¹Vgl. Abschnitt 3.3 oder [FdV, App., Tab. A]

²Angegeben ist ein Repräsentant aus jeder Isomorphieklasse, und zwar zuerst die kanonische kompakte Form (vgl. Abschnitt 2.8). Quelle: [OV, §5.1.6, Thm. 6], für die kanonischen kompakten Formen auch Satz 2.30; für eine umfassende Darstellung aller Typen siehe [HS]

³Ausführliche Behandlung z. B. in [Ja2] oder [HS]

⁴Kurzgefaßte Konstruktion ohne Beweise in [Ja1, S.142]; G_2 etwas ausführlicher in [Hu, §19.3]

⁵vgl. Abschnitt 1.4

Tabelle 2: Die einfachen komplexen Lie-Algebren (Fortsetzung)

Typ	$2\delta = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$ ^{5 6}	Adjungierte Darstellung			Satz elementarer Darst. ^{7 11}	Satz definierender Darst. ^{7 12}
		Klasse ^{7 8}	$\Lambda(\text{ad})$ ^{5 9}	$\text{ind}(\text{ad})$ ¹⁰		
A_ℓ ($\ell \geq 1$)	$j(\ell+1-j)$	$f_1 \tilde{\otimes} f_\ell$	1 1 ... 1	$2(\ell+1)$	$\{f_1\}, \{f_\ell\}$	$\{f_1\}, \{f_\ell\}$
B_ℓ ($\ell \geq 2$)	$j(2\ell-j)$	$\ell=2: \tilde{\wedge}^2 f_1 = f_2 \tilde{\otimes} f_2$ $\ell \geq 3: \tilde{\wedge}^2 f_1 = f_2$	1 2 2 ... 2	$2(2\ell-1)$	$\ell=2: \{f_2\}$ $\ell \geq 3: \{f_1, f_\ell\}$	$\{f_1\}$
C_ℓ ($\ell \geq 3$)	$j \neq \ell: j(2\ell+1-j)$ $j = \ell: \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$	$f_1 \tilde{\otimes} f_1$	2 1 1 ... 1	$2(\ell+1)$	$\{f_1\}$	$\{f_1\}$
D_ℓ ($\ell \geq 4$)	$j \leq \ell-2: j(2\ell-j-1)$ $j = \ell-1, \ell: \frac{1}{2}\ell(\ell-1)$	f_2	1 2 2 ... 2 $\frac{1}{1}$	$4(\ell-1)$	$\{f_1, f_{\ell-1}, f_\ell\}$	$\{f_1, f_{\ell-1}\},$ $\{f_1, f_\ell\}$
E_6	22 16 30 42 30 16	f_6	2 1 2 3 2 1	24	$\{f_1, f_5, f_6\}$	$\{f_1, f_5\}$
E_7	49 27 52 75 96 66 34	f_6	2 1 2 3 4 3 2	36	$\{f_1, f_6, f_7\}$	$\{f_1, f_6\}$
E_8	136 58 114 168 220 270 182 92	f_1	3 2 3 4 5 6 4 2	60	$\{f_1, f_7, f_8\}$	$\{f_1, f_7\}$
F_4	16 30 42 22	f_1	2 3 4 2	18	$\{f_1, f_4\}$	$\{f_1\}$
G_2	6 10	f_1	2 3	8	$\{f_2\}$	$\{f_1\}$

⁵Angegeben sind die Koeffizienten in der Entwicklung von $\Lambda(\text{ad})$ bzw. 2δ nach einfachen Wurzeln, und zwar entweder als allgemeiner Koeffizient n^j oder als Ziffernfolge, wobei jede Ziffer zu derjenigen einfachen Wurzel gehört, an dessen Stelle sie steht, wenn man die Folge auf das Dynkin-Diagramm in Spalte 2 des ersten Teils der Tabelle überträgt.

⁶Aus [Bou, App., Planche I-IX]; für die klassischen Serien auch entsprechend der Bemerkung im Abschnitt 3.3 mit Hilfe der Wurzelgitter auf Seite 65 zu ermitteln

⁷ f_j bezeichnet die fundamentale Darstellung mit der klassifizierenden Zahlenfolge $\Lambda_i(f_j) = \delta_{ij}$ (entsprechend der im Dynkin-Diagramm angegebenen Reihenfolge der einfachen Wurzeln)

⁸Vgl. Satz 4.10

⁹Klassische Serien: vgl. die Wurzelgitter auf Seite 65; exzeptionelle Lie-Algebren: aus [FdV, App., Tab. E]

¹⁰Mit Hilfe von Gleichung (4.9) zu berechnen oder aus [FdV, App., Tab. A] zu bestimmen; für die klassischen Serien vgl. auch Lemma 1.13

¹¹Vgl. Satz 4.12

¹²Vgl. Satz 5.5

Tabelle 3: Die Cartan-Matrizen der einfachen komplexen Lie-Algebren ²

Klassische Serien

Typ	Cartan-Matrix	Inverse
$A_\ell (\ell \geq 1)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\ell+1} \begin{pmatrix} 1 \cdot \ell & 1(\ell-1) & 1(\ell-2) & \cdots & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ 1(\ell-1) & 2(\ell-1) & 2(\ell-2) & \cdots & 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ 1(\ell-2) & 2(\ell-2) & 3(\ell-2) & \cdots & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & \cdots & (\ell-1)2 & (\ell-1)1 \\ 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 & \cdots & (\ell-1)1 & \ell \cdot 1 \end{pmatrix}$
$B_\ell (\ell \geq 2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -2 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(\ell-1) & 2(\ell-1) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell-1 & \ell \end{pmatrix}$
$C_\ell (\ell \geq 3)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(\ell-1) & (\ell-1) \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(\ell-1) & \ell \end{pmatrix}$
$D_\ell (\ell \geq 4)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(\ell-2) & \ell-2 & \ell-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell-2 & \frac{\ell}{2} & \frac{\ell-2}{2} \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \ell-2 & \frac{\ell-2}{2} & \frac{\ell}{2} \end{pmatrix}$

²Die zugrundeliegende Reihenfolge der einfachen Wurzeln ist die aus Spalte 2 der Tabelle 2

Tabelle 3: Die Cartan-Matrizen der einfachen komplexen Lie-Algebren (Fortsetzung)

Exzeptionelle Algebren

Typ	Cartan-Matrix	Inverse
E_6	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
E_7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
E_8	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
F_4	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
G_2	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tabelle 4:
Die fundamentalen Darstellungen der klassischen einfachen komplexen Lie-Algebren

Typ	Darstellung ¹	Sym- bol ²	Dimen- sion ³	höchstes Gewicht ⁴	Index ⁵	duale Dar- stellung ³	Produkt- zerlegung ⁶
A_ℓ ($\ell \geq 1$)	f_k	π_k	$\binom{\ell+1}{k}$	$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j(\ell-k+1)}{\ell+1} \alpha_j$ $+ \sum_{j=k}^{\ell} \frac{k(\ell+1-j)}{\ell+1} \alpha_j$	$\binom{\ell-1}{k-1}$	$\pi_{\ell+1-k}$	$\wedge^k \pi_1$
B_ℓ ($\ell \geq 2$)	f_k ($k \leq \ell-1$)	τ_k	$\binom{2\ell+1}{k}$	$\sum_{j=1}^k j \alpha_j + k \sum_{j=k+1}^{\ell} \alpha_j$	$2 \binom{2\ell-1}{k-1}$	τ_k	$\wedge^k \tau_1$ $\tau_{\ell-1} = \tilde{\wedge}^2 \sigma$
	f_ℓ	σ	2^ℓ	$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} j \alpha_j$	$2^{\ell-2}$	σ	elementar
C_ℓ ($\ell \geq 3$)	f_k	ϱ_k	$\binom{2\ell}{k} - \binom{2\ell}{k-2}$ $k=1: 2\ell$	$\sum_{j=1}^k j \alpha_j$ $+ k(\sum_{j=k+1}^{\ell-1} \alpha_j + \frac{1}{2} \alpha_\ell)$	$\frac{\ell+1-k}{\ell} \binom{2\ell}{k-1}$	ϱ_k	$\tilde{\wedge}^k \varrho_1$
D_ℓ ($\ell \geq 4$)	f_k ($k \leq \ell-2$)	τ_k	$\binom{2\ell}{k}$	$\sum_{j=1}^k j \alpha_j + k \sum_{j=k+1}^{\ell-2} \alpha_j$ $+ \frac{1}{2} k(\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell)$	$2 \binom{2\ell-2}{k-1}$	τ_k	$\wedge^k \tau_1$ $\tau_{\ell-2} = \tilde{\wedge}^2 \sigma_1$ $= \tilde{\wedge}^2 \sigma_2$
	$f_{\ell-1}$	σ_1	$2^{\ell-1}$	$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-2} j \alpha_j$ $+ \frac{1}{4}(\ell \alpha_{\ell-1} + (\ell-2) \alpha_\ell)$	$2^{\ell-3}$	σ_1 (ℓ gerade) σ_2 (ℓ unger.)	elementar
	f_ℓ	σ_2	$2^{\ell-1}$	$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell-2} j \alpha_j$ $+ \frac{1}{4}((\ell-2) \alpha_{\ell-1} + \ell \alpha_\ell)$	$2^{\ell-3}$	σ_2 (ℓ gerade) σ_1 (ℓ unger.)	elementar

Die entsprechenden Daten für die fundamentalen Darstellungen der exzeptionellen Lie-Algebren findet man ebenfalls in [Ti] (Dimension, duale Darstellung und Produktzerlegung) sowie [Hu, §13.2, Tab. 1], [FdV, App., Tab. F] oder [Bou, App., Planche I-IX] (höchste Gewichte).

¹Vgl. Fußnote 7 zur Tabelle 2

²Nach Dynkin

³Aus [Ti]

⁴Angegeben ist der allgemeine Koeffizient q^j in der Entwicklung $\Lambda(f) = \sum_{j=1}^{\ell} q^j \alpha_j$ nach einfachen Wurzeln; zur Berechnung siehe Satz 4.8. Quelle: [Hu, §13.2, Tab. 1]

⁵siehe Gleichung (4.9)

⁶Zerlegung in ein reduziertes äußeres Produkt elementarer Darstellungen, vgl. Satz 4.12. Man beachte den Unterschied zwischen \wedge und $\tilde{\wedge}$.

Literaturverzeichnis

[Teil 1: Theorie]

- [BR] A. O. Barut, R. Raczka: "Theory of Group Representations and Applications", Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977
- [Bou] N. Bourbaki: "Groups et algèbres de Lie", chap. 4-6, Hermann, Paris 1968
- [Dy] E. B. Dynkin: "Halbeinfache Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren" (Russisch), Matematičeskij Sbornik, T. 30(1952), Nr. 2, S. 349-462; englische Übersetzung in Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 6(1957), S.111-244
- [FdV] H. Freudenthal, H. de Vries: "Linear Lie Groups", Pure and applied mathematics 35, Academic Press 1969
- [GG] M. Goto, F. D. Grosshans: "Semi-simple Lie Algebras", Dekker 1978
- [HS] M. Hausner, J. Schwartz: "Lie Groups; Lie Algebras", Gordon and Breach 1968
- [HN] J. Hilgert, K.-H. Neeb: "Lie-Gruppen und Lie-Algebren", Vieweg 1991
- [Hu] J. E. Humphreys: "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer 1972
- [Ja1] N. Jacobson: "Lie Algebras", Interscience tracts in pure and applied mathematics 10, Wiley 1962
- [Ja2] N. Jacobson: "Exceptional Lie Algebras", Dekker 1971
- [OV] A. L. Oniščik, E. B. Vinberg: "Lie Groups and Algebraic Groups", Springer 1990 (engl. Übersetzung von "Seminar po gruppam Li i algebraičeskim gruppam", Moskau 1988)
- [Ti] J. Tits: "Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen", Lecture Notes in Mathematics 40, Springer 1967
- [VK] I. P. Volobuev, J. A. Kubyshin, Teor. Mat. Fiz. 68/2 (1986) 225-235

[Teil 2: Anwendungen]

- [1] P. Langacker, Phys. Rep.(Phys. Lett. Sect. C) v.72 (1981) 185 - 385
- [2] P. Forgacs and N. Manton, Commun. Math. Phys. 72 (1980) 15

- [3] J. Harnad, S. Shnider and J. Tafel, *Lett. Math. Phys.* 4 (1980) 107
- [4] G. Rudolph, *Lett. Math. Phys.* 14 (1987) 133
- [5] G. Rudolph and I. P. Volobuev, *Teor. Mat. Fiz.* 62 (1985) 388
- [6] Yu. A. Kubyshin, J. M. Mourão, G. Rudolph and I. P. Volobuev, *Dimensional Reduction of Gauge Theories, Spontaneous Compactification and Model Building*, Springer Lecture Notes in Physics 349 (1989)
- [7] D. Kapetanakis and G. Zoupanos, *Phys. Lett.* B232 (1989) 104
- [8] G. Chapline, N. S. Manton, *Nucl. Phys.* B184 (1981) 39
- [9] F. A. Bais, K. J. Barnes, P. Forgacs, G. Zoupanos, *Nucl. Phys.* B263 (1986) 557
- [10] N.G. Kozimirov, V.A. Kuzmin, I.I. Tkachev, *Sov. J. Nucl. Phys.* v.49, 164 (1989); *Phys. Rev.* D43 (1991) 1949
- [11] E. B. Dynkin, *Trudy Mosk. Matem. Obščestva*
- [12] G. Rudolph, I. P. Volobuev, *Int. J. Mod. Phys.* A11 (1996) 2127

Bezeichnungen und Symbole

Griechische Buchstaben

$\Gamma(f), \Gamma_H(f)$	Gewichtssystem der Darstellung f (bezüglich der Cartan-Unteralgebra H) (S. 33)
δ	$\equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$ (S. 45)
$\Lambda(f), \Lambda_{H,\pi}(f)$	höchstes Gewicht der Darstellung f (bezüglich einer Cartan-Unteralgebra H und eines SEW π) (S. 67)
$\Lambda_{\lambda_i}(f)$	klassifizierende Zahlenfolge der Darstellung f ($i = 1, \dots, \text{rg}(\mathcal{L})$) (S. 71)
π	ein System einfacher Wurzeln (S. 39) oder ein π -System (S. 51)
$\pi_k, \varrho_k, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \tau_k$	Bezeichnungen der fundamentalen Darstellungen der klassischen Lie-Algebren nach Dynkin (S. 74)
ϱ_h	Bild des Elementes h einer Cartan-Unteralgebra H unter dem von der Killing-Form erzeugten Isomorphismus $H \rightarrow H^*$ (S. 31)
Σ	ein Wurzelsystem (S. 29)
Σ^+, Σ^-	Teilmenge der positiven bzw. negativen Wurzeln (S. 38)
Σ_π	von dem π -System π in dem Wurzelsystem Σ erzeugte Teilmenge (S. 89)
σ_α	Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zur Wurzel α (S. 43)
ω	eine definierende Darstellung (S. 82)

Symbole

$(x, y), (x, y)_{\mathcal{L}}$	Killing-Form (der Lie-Algebra \mathcal{L}) (S. 14)
$(\varrho, \sigma), (\varrho, \sigma)_{H^*}$	von der Killing-Form über den Isomorphismus $H \rightarrow H^*$ induzierte Bilinearform auf H^* (S. 31)
$\langle x, y \rangle$	kanonisch normierte ISBLF auf einer einfachen Lie-Algebra (S. 59)
$\langle \varrho, \sigma \rangle$	von der kanonisch normierten ISBLF auf einer einfachen Lie-Algebra über den Isomorphismus $H \rightarrow H^*$ induzierte Bilinearform auf H^* (S. 59)
$f \tilde{\otimes} g$	irreduzible Komponente des höchsten Gewichtes der Darstellung $f \otimes g$ (S. 74)
$\tilde{\bigwedge}^r f$	irreduzible Komponente des höchsten Gewichtes der Darstellung $\bigwedge^r f$ (S. 74)

Lateinische Buchstaben

A_{ij}	Cartan-Matrix (S. 40)
$\text{ad}, \text{ad}_{\mathcal{L}}$	adjungierte Darstellung (der Lie-Algebra \mathcal{L}) (S. 12)
$\text{Ad}(\Sigma)$	Weyl-Gruppe des Wurzelsystems Σ (S. 43)
$\text{Aut}(\pi)$	Automorphismen des SEW π (isometrische Permutationen) (S. 46)
$\text{Aut}(\Sigma)$	Automorphismen des Wurzelsystems Σ (linear und isometrisch) (S. 46)
B_f	Spurform der Darstellung f (S. 13)
$C(f)$	quadratischer Casimir-Operator der Darstellung f (S. 79)
$\text{card}(M)$	Kardinalzahl (Mächtigkeit) der Menge M
$D(\pi), D(\mathcal{L})$	Dynkin-Diagramm des π -Systems π bzw. der Lie-Algebra \mathcal{L} (S. 52)
$\text{Der}(\mathcal{A})$	Derivationen der Algebra \mathcal{A} (S. 7)
$E_{(ij)}$	linearer Operator auf \mathbb{K}^n ; auf kanonischer Basis $\{e_i\}$ gilt $E_{(ij)}e_k = \delta_{jk}e_i$ (S. 19)
$E^{(ij)}$	lineares Funktional auf $gl(n, \mathbb{K})$, gegeben durch $E^{(ij)}(A) := A_{ij}$ (S. 19)
e_α	Element eines Systems normierter Wurzelvektoren (S. 32)
f_k	Die Darstellung mit der klassifizierenden Zahlenfolge $\Lambda_i(f_k) = \delta_{ik}$ (S. 74)
$gl(n, \mathbb{K})$	Lie-Algebra der linearen Operatoren auf \mathbb{K}^n (S. 8)
H	eine Cartan-Unteralgebra (S. 28)
H_0^*	$H_0^* = \text{span}_{\mathbf{Q}}\Sigma$ ($\Sigma \dots$ Wurzelsystem bezüglich der Cartan-Unteralgebra H) (S. 37)
$H_{\mathbb{R}}^*$	$H_{\mathbb{R}}^* = \text{span}_{\mathbb{R}}\Sigma$ (S. 37)
$\tilde{H}_{\mathbb{R}}^*$	$\tilde{H}_{\mathbb{R}}^* = H_{\mathbb{R}}^* \setminus (\bigcup_{\alpha \in \Sigma} P_\alpha^*)$ (S. 43)
H_π	$H_\pi = (\text{span}_{\mathbb{C}}\pi)^*$ (π ein π -System im Wurzelsystem der Cartan-Unteralgebra H) (S. 89)
\mathbb{H}	Schiefkörper der Quaternionen
h_ϱ	Bild des Elementes $\varrho \in H^*$ (H eine Cartan-Unteralgebra) unter dem von der Killing-Form erzeugten Isomorphismus $H^* \rightarrow H$ (S. 31)
$h(\alpha)$	Höhe der Wurzel α (S. 40)
$\text{ind}(f), \text{ind}(\varphi)$	Index der Darstellung f (S. 78) bzw. der Einbettung φ (S. 86)
J	der lineare Operator $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ auf \mathbb{K}^{2n} (S. 18)
\mathcal{L}	eine Lie-Algebra
\mathcal{L}_α	Wurzelunterraum zur Wurzel α (S. 29)
$\mathcal{L}_{(\alpha)}$	von der Wurzel α erzeugte A_1 -Unteralgebra: $\mathcal{L}_{(\alpha)} = \mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{L}_{-\alpha} \oplus [\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{-\alpha}]$ (S. 34)
\mathcal{L}_π	von dem π -System π in Σ erzeugte reguläre halbeinfache Unteralgebra (S. 89)
$m(\mu)$	Vielfachheit des Gewichtes μ (S. 33)
$N_{\mathcal{L}}(A)$	Normalisator der Teilmenge A in \mathcal{L} (S. 10)
$N_{\alpha, \beta}$	Strukturkonstanten einer Weyl-Chevalley-Basis (S. 42)
P_α^*, P_α	Hyperebene in H^* orthogonal zu der Wurzel α bzw. deren Pendant in H (S. 42)
\mathbf{Q}	Körper der rationalen Zahlen
$q_{\mu, \alpha}, r_{\mu, \alpha}$	charakteristische Zahlen der α -Folge durch das Gewicht μ (S. 35)
$\text{rg}(\mathcal{L})$	Rang der Lie-Algebra \mathcal{L} (S. 12)
$sl(n, \mathbb{K})$	Lie-Algebra der spurfreien linearen Operatoren auf \mathbb{K}^n (S. 8)
$so(n, \mathbb{K})$	Lie-Algebra der schiefsymmetrischen Operatoren auf \mathbb{K}^n (S. 17)
$so(n)$	\sim auf \mathbb{R}^n (S. 17)
$sp(n, \mathbb{K})$	Lie-Algebra der bezüglich der kanonischen symplektischen Form schiefadjungierten Operatoren auf \mathbb{K}^{2n} (S. 18)
$sp(n)$	Lie-Algebra der schiefadjungierten Operatoren auf \mathbb{H}^n (S. 18)
$su(n)$	Lie-Algebra der spurfreien schiefadjungierten Operatoren auf \mathbb{C}^n (S. 18)
$u(n)$	Lie-Algebra der schiefadjungierten Operatoren auf \mathbb{C}^n (S. 18)
V_μ, v_μ	Gewichtsunterraum bzw. Gewichtsvektor zum Gewicht μ einer Darstellung (S. 33)
$Z_{\mathcal{L}}(A)$	Zentralisator der Teilmenge A in \mathcal{L} (S. 6)
$Z(\mathcal{A})$	Zentrum der Algebra \mathcal{A} (S. 6)

Index

- abgeleitete Reihen 9
- adjungierte Darstellung 12
- Algebra 5
- Äquivalenz
 - von Darstellungen 10
 - von Einbettungen 81
 - von π -Systemen 51
 - von π -Systemen in einem Wurzelsystem 88
- auflösbar 9
- äußeres Produkt (Darstellung) 11
- Automorphismus, innerer 12

- Cartan-Kriterium 15
 - \sim -Matrix 40
 - \sim -Unteralgebra 28
- Casimir-Operator, quadratischer 79
- charakteristische Darstellung einer Einbettung 84

- Darstellung 10
- definierend (Darstellung) 82
- Derivation 7
 - innere \sim 12
- Dimensionsformel von Weyl 80
- direkte Summe
 - von Algebren 6
 - von Darstellungen 11
 - von π -Systemen 52
- duale Darstellung 11
- Dynkin-Diagramm 52

- Einbettungsgleichung 85
- einfach
 - Lie-Algebra 9
 - Wurzel 39
- elementar (Darstellung) 74
- Elementarumwandlung 89
- Engel, Satz von 28
- Erweiterung (eines π -Systems in einem Wurzelsystem) 89
- exzeptionelle Lie-Algebren 60

- Faktorisierung (nach einem Ideal) 6
- Filtration 7
 - kanonische \sim einer halbeinfachen Lie-Algebra 40
- Freudenthal, Multiplizitätsformel von 70
- fundamental (Darstellung) 74

- Gewicht 33
 - \sim -system 33
 - \sim -sunterraum 33
 - \sim -vektor 33
- $gl(V)$, $gl(n, \mathbb{K})$ 8
- Graduierung 7
 - kanonische \sim einer halbeinfachen Lie-Algebra 40

- halbeinfach
 - Lie-Algebra 9
 - Element einer Lie-Algebra 27
- Höhe (einer Wurzel) 40
- homogene Folge (von Wurzeln) 57

- Ideal 6
- Index
 - einer Darstellung 78
 - einer Unteralgebra 86
- innerer Automorphismus 12
- innere Derivation 12
- invariant (Bilinearform) 10
- invariante symmetrische Bilinearform (ISBLF) 13
- irreduzibel
 - Darstellung 11
 - π -System 53
- ISBLF *svw. invariante symmetrische Bilinearform*

- Jacobi-Identität 7
- Jordan-Zerlegung
 - von linearen Operatoren 27
 - von Elementen einer halbeinfachen Lie-Algebra 28

- kanonischer Isomorphismus $H \rightarrow H^*$ 31
- kanonisch normiert
 - ISBLF 59
 - Skalarprodukt 59
- Killing-Form 14
- Klassifizierung
 - der zusammenhängenden π -Systeme 59
 - der einfachen komplexen Lie-Algebren 60
 - der irreduziblen Darstellungen 71
 - der regulären
 - halbeinfachen Unteralgebren 90

- kompakt
 - Lie-Algebra 9
 - \sim e Form einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra 49
- Komplexifizierung 7
- kontragrediente Darstellung 11
- Levi-Mal'cev-Zerlegung (für kompakte Lie-Algebren) 10
- lexikografische Ordnung 38
- Lie-Algebra 7
- lineare Äquivalenz (von Einbettungen) 81
- Morphismus
 - von Algebren 5
 - von Darstellungen 10
- Multiplizitätsformel von Freudenthal 70
- nicht ausgeartet (Bilinearform) 13
- nilpotent
 - Lie-Algebra 9
 - Element einer Lie-Algebra 27
- Normalisator 10
- π -System 51
 - \sim in einem Wurzelsystem 88
- Rang (einer Lie-Algebra) 12
- reelle Form 7
- regulär
 - Element einer Lie-Algebra 12
 - Unteralgebra 87
- Rekonstruktionssatz 41
- Schur, Lemma von 11
- SEW *svw. System einfacher Wurzeln*
- $sl(V)$, $sl(n, \mathbb{K})$ 8
- $so(n, \mathbb{K})$ 17
- $sp(n)$ 18
- $sp(n, \mathbb{K})$ 18
- Spiegelung 43
- Spurform (einer Darstellung) 13
- Strukturkonstanten 9
- Struktursatz (für halbeinfache Lie-Algebren) 16
- $su(n)$ 18
- symmetrisch (Bilinearform) 13
- System einfacher Wurzeln 39
- System normierter Wurzelvektoren 32
- Tensorprodukt
 - von Algebren 6
 - von Darstellungen 11
- treu (Darstellung) 10
- $u(n)$ 18
- Unteralgebra 6
- Verflechtungszahl 10
- verträglich (Ordnungen) 68
- Verzweigungsregel 81
- Vielfachheit (eines Gewichtes) 33
- vollständig (π -System in einem Wurzelsystem) 88
- vollständig reduzibel (Darstellung) 11
- Weyl, Dimensionsformel von \sim 80
 - \sim -Chevalley-Basis 41
 - \sim -Gruppe 43
 - \sim -Ebene 43
 - \sim -Kammer 43
- Wurzel 29
 - \sim -folge 35
 - \sim -gitter 63
 - \sim der klassischen einfachen Lie-Algebren 65
 - \sim -raumzerlegung 30
 - \sim -system 29
 - \sim -unterraum 29
- Zentralisator 6
- Zentralreihe
 - obere 9
 - untere 9
- Zentrum 6
- zusammenhängend (π -System) *svw. irreduzibles π -System*